Régression polynomiale et moindres carrés

Considérons le modèle de régression polynomiale de degré p :

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_2 x_i^2 + \ldots + \beta_p x_i^p + e_i, \tag{1}$$

les erreurs e_i sont supposées centrées, dé-corrélées et Gaussiennes. L'objectif est d'estimer le vecteur des cœfficients de régression $\boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_p)^T$ d'une fonction de régression polynomiale de degré p à partir de l'échantillon i.i.d $((x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n))$ dont les valeurs sont données par :

```
x = linspace(0,1,10)';
y =  sin(2*pi*x) + normrnd(0,0.2,10,1);
```

La méthode d'estimation utilisée est celle des moindres carrés dont l'estimateur est donné par :

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{y} \tag{2}$$

où $\mathbf{X}$ est la matrice de régression (construite à partir du vecteur des entrées `x`) et $\mathbf{y}$ est le vecteur des sorties `y`.

1. Implémentez une fonction permettant le calcul de l'estimateur des moindres carrés (2).
2. Calculer (dans un script) la fonction de régression estimée à partir de l'échantillon donné, pour chacune des valeurs suivantes de p : $p = 1, 3, 4, 9$.
3. Représentez sur le même graphique les données et chacune des fonctions de régression estimées. Que remarquez vous lorsque $p = 9$? pourquoi à votre avis ?

Sélection de modèle en régression polynomiale

On souhaite sélectionner la meilleur degré p du modèle, parmi les valeurs $p = 1, 3, 4, 9$. Pour cela on utilisera le critère d'information Bayésien (BIC) donné par :

$$\mathrm{BIC}(p) = -\frac{n}{2}\big(\log(2\pi) + \log(\sigma^2)\big) - \frac{1}{2\sigma^2}\Big(\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}\Big)^T\Big(\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}\Big) - p\log(n)$$

où n est la taille de l'échantillon. Le meilleur degré est celui qui correspond à la plus valeur valeur du critère BIC.

1. On donne $\sigma = 0.2$. En utilisant BIC, donnez le meilleur degré du modèle.
2. Représentez graphiquement les valeurs BIC en fonction des valeurs de p.
3. Faites la même chose avec AIC
4. Avec le R^2 ajusté