

Consignes : Documents interdits. Composer avec un stylo. La feuille double doit porter vos nom, prénom, et signature, cachés par collage. Numérotter les éventuelles feuilles intercalaires. Toute réponse doit être justifiée.

Exercice 1 (9 pts) Soit un couple de variables aléatoires (X, Y) tel que X prend ses valeurs dans $X(\Omega) = \{-2, 0, 1\}$ et Y dans $Y(\Omega) = \{-1, 1, 2\}$ dont la loi jointe est donnée par le tableau suivant :

$\mathbb{P}(X = x, Y = y)$	$y = -1$	$y = 1$	$y = 2$
$x = -2$	0.2	0.2	α
$x = 0$	0.1	0.1	0.05
$x = 1$	0.2	0	0.1

1. Donner la valeur de α en justifiant votre réponse.
2. Calculer la loi marginale de X .
3. Calculer la loi marginale de Y .
4. Montrer que X et Y ne sont pas indépendantes.
5. Calculer la loi conditionnelle de X sachant $Y = 1$.
6. En déduire $\mathbb{E}[X|Y = 1]$.
7. Calculer l'espérance conditionnelle de X sachant $Y \neq 2$.
8. Calculer $\mathbb{E}[XY]$.
9. En déduire $\text{Cov}(X, Y)$.

Exercice 2 (6 pts) Soit (X, Y) un couple de v.a. de densité :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2(e^2 - 1)} xe^y & \text{si } (x, y) \in [0, 2]^2, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Déterminer la densité de X .
2. Déterminer la densité de Y .
3. Est-ce que X et Y sont indépendantes ?
4. On pose $Z = e^Y$. Déterminer la densité de Z .
5. Donner $\mathbb{E}[Z]$.
6. Donner $\mathbb{V}[Z]$.

Exercice 3 (Cours, 5 pts). Soit X une v.a. de loi Bernoulli $\mathcal{B}(\theta)$, i.e. : $\mathbb{P}(X = x; \theta) = \theta^x(1 - \theta)^{1-x}$, $\forall x \in \{0, 1\}$ où $\theta \in]0, 1[$ est le paramètre inconnu que l'on estime à partir d'un échantillon i.i.d $(X_1, \dots, X_n) \sim \mathcal{B}(\theta)$. Soit $\hat{\theta}$ l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ .

1. Retrouver que $\hat{\theta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$.
2. Est-il sans biais ?
3. Quelle est sa variance ?
4. Est-il convergent ?
5. Si oui, quelle est sa loi limite ?