Université de Caen | **Partiel du 18 novembre 2021. Durée 1h** | **Probabilités et Statistique 3**
UFR des Sciences | Par Faïcel Chamroukhi | **L3 Maths-MIASHS**

Consignes : Documents interdits. Composer avec un stylo. La feuille double d'examen doit porter vos nom, prénom, et signature, cachés par collage. Barème donné à titre indicatif.

Exercice 1 *(3 pts)*

Dans les années 80 au Canada, 52% des adultes fumaient. Il était établi que les fumeurs avaient une probabilité de 17.2% de développer un cancer du poumon durant leur vie, alors que les non-fumeurs avaient 1.3% de chance de le contracter. Calculer chacune des probabilités suivantes (Il n'est pas nécessaire de se servir d'une calculette, une expression numérique suffira pour exprimer le résultat).

1. La probabilité qu'un canadien ait un cancer de poumon, sachant qu'il fumait dans les années 80
2. La probabilité qu'un canadien dans les années 80 fumait et ait contracté un cancer du poumon
3. La probabilité qu'un canadien ait été fumeur dans les années 80, sachant qu'il ait été diagnostiqué malade du cancer du poumon.

Solution 1

1. $\mathbb{P}(Cancer|Fumeur) = 0.172$
2. $\mathbb{P}(Cancer \cap Fumeur) = \mathbb{P}(Cancer|Fumeur)\mathbb{P}(Fumeur) = 0.172 \times 0.52 = 0.089$ (d'après l'énoncé $\mathbb{P}(Fumeur) = 0.52$)
3. Il s'agit ici de calculer $\mathbb{P}(Fumeur|Cancer)$. Le **théorème de Bayes** s'applique de la façon suivante.

$$\mathbb{P}(Fumeur|Cancer) = \frac{\mathbb{P}(Cancer|Fumeur)\mathbb{P}(Fumeur)}{\mathbb{P}(Cancer)}$$

avec $\mathbb{P}(Cancer|Fumeur) = 0.172$ et $\mathbb{P}(Fumeur) = 0.52$. Le calcul de $\mathbb{P}(Cancer)$ se fait en appliquant la **formule des probabilités totales**, au système complet d'évènements (à la partition) $\{Fumeur,\ NonFumeur\}$, de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Cancer) &= \mathbb{P}(Cancer \cap Fumeur) + \mathbb{P}(Cancer \cap NonFumeur)\\ &= \mathbb{P}(Cancer|Fumeur)\mathbb{P}(Fumeur) + \mathbb{P}(Cancer|NonFumeur)\mathbb{P}(NonFumeur)\\ &= 0.172 \times 0.52 + 0.013 \times 0.48 \simeq 0.089 + 0.006 = 0.095\end{aligned}$$

Donc $\mathbb{P}(Fumeur|Cancer) = \frac{0.172\times 0.52}{0.095} = 0.937!$

Exercice 2 *(3 pts)* Soient $p \in]0,1[$ et X une v.a. suivant la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1-p)$:

$$\mathbb{P}(X=0) = p, \qquad \mathbb{P}(X=1) = 1-p.$$

1. Calculer $\mathbb{E}\left(1+2X\right)$
2. Calculer $\mathbb{V}\left(1+2X\right)$
3. Déterminer la loi de la v.a. $Y = 1 - \sqrt{1-X}$

Solution 2

1. Par linéarité de l'espérance, on a $\mathbb{E}\left(1+2X\right)=1+2\mathbb{E}\left(X\right)$. On a $\mathbb{E}(X)=1-p$ (X est Bernoulli de paramètre $1-p$.) Donc
$$\mathbb{E}\left(1+2X\right)=1+2(1-p)=3-2p.$$
2. En utilisant la propriété élémentaire de la variance (quadratique), $\mathbb{V}(aX+b)=b^2\mathbb{V}(X)$, on a $\mathbb{V}\left(1+2X\right)=\mathbb{V}\left(2X\right)=2^2\mathbb{V}(X)=4\mathbb{V}(X)$. Comme $\mathbb{V}(X)=(1-p)p$ (X est Bernoulli de paramètre $1-p$) on obtient
$$\mathbb{V}\left(1+2X\right)=4(1-p)p.$$
3. Comme $X(\Omega)=\{0,1\}$, on a $Y(\Omega)=\{0,1\}=X(\Omega)$, et $\{Y=0\}=\{X=0\}$ et $\{Y=1\}=\{X=1\}$. La loi de Y est
$$\mathbb{P}(Y=0)=\mathbb{P}(X=0)=p, \qquad \mathbb{P}(Y=1)=\mathbb{P}(X=1)=1-p.$$
On en déduit que X et Y suivent la même loi.

Exercice 3 *(4 pts)* Soit X une v.a. gaussienne de densité φ telle que $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}, \forall x\in\mathbb{R}$. On note par Φ sa fonction de répartition.

1. Calculer $\mathbb{E}(X+1)$
2. Calculer $\mathbb{V}(-2X)$

On pose $Y=e^{|X|}$.

3. Déterminer la fonction de répartition de Y, notée F_Y, en fonction de Φ.
4. Déterminer la densité de Y, notée f_Y.

Solution 3

1. X suit une loi normale centrée réduite. Donc par linéarité de l'espérance on a $\mathbb{E}(X+1)=\mathbb{E}(X)+1=1$ et
2. en utilisant la propriété quadratique de la variance on trouve : $\mathbb{V}(-2X)=(-2)^2\mathbb{V}(X)=4$
3. On a $X(\Omega)=\mathbb{R}$. Donc $(|X|)(\Omega)=[0,\infty[$ et $Y(\Omega)=[1,\infty[$. Par conséquent, pour tout $y<1$, on a
$$\mathbb{P}(Y\leqslant y)=0.$$
Pour tout $y\geqslant 1$, on a
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y\leqslant y) &= \mathbb{P}(e^{|X|}\leqslant y)=\mathbb{P}(|X|\leqslant \ln y)\\ &= \mathbb{P}(-\ln y\leqslant X\leqslant \ln y)\\ &= \mathbb{P}(X\leqslant \ln y)-\mathbb{P}(X\leqslant -\ln y).\end{aligned}$$
Au final, en notant $\Phi(y)$ la fonction de répartition de X en la valeur y, la fonction de répartition de Y est
$$F_Y(y)=\begin{cases}\Phi(\ln y)-\Phi(-\ln y) & \text{si } y\geqslant 1,\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$
comme $-\ln y\leqslant 0$ pour tout $y\geqslant 1$, alors
$$F_Y(y)=\begin{cases}2\Phi(\ln y)-1 & \text{si } y\geqslant 1,\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$
Par dérivation, on en déduit la densité de Y :
$$f_Y(y)=F'_Y(y)=\begin{cases}\frac{2}{y}\varphi(\ln y) & \text{si } y\geqslant 1,\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$