Université de Caen	**Examen du 06 décembre 2021. Durée 2h**	**Probabilités et Statistique 3**
UFR des Sciences	Par Faïcel Chamroukhi	**L3 Maths-MIASHS**

Consignes : Documents interdits. Composer avec un stylo. La feuille double doit porter vos nom, prénom, et signature, cachés par collage. Numéroter les éventuelles feuilles intercalaires. Toute réponse doit être justifiée.

Solution 1

1. Ce tableau représente la loi de probabilité du coupe (X, Y), donc la somme de toutes les probabilités contenues dans le tableau doit être égale à 1 (propriété de loi de probabilité du couple). La somme vaut $0.95 + \alpha$. Donc $\alpha = 0.05$.
2. La loi marginale de X est obtenue à partir de la loi jointe du couple par
$$\mathbb{P}(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}(X = x, Y = y)$$
Par exemple pour $x = -2$, on a $\mathbb{P}(X = -2) = \mathbb{P}(X = -2, Y = -1) + \mathbb{P}(X = -2, Y = 1) + \mathbb{P}(X = -2, Y = 2) = 0.2 + 0.2 + 0.05 = 0.45$. Ceci correspond à la somme des colonnes du tableau de la loi jointe pour la ligne correspondant à $x = -2$. Idem pour les autres valeurs de X. La loi de X est donc donné par : On peut vérifier

x	-2	0	1
$\mathbb{P}(X = x)$	0.45	0.25	0.3

que la somme des probabilités fait 1.
3. De la même façon, on obtient la loi marginale de Y donnée par
$$\mathbb{P}(Y = y) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x, Y = y)$$
Ceci correspond à la somme des lignes du tableau de la loi jointe pour chaque ligne correspondant à la valeur de y.

y	-1	1	2
$\mathbb{P}(Y = y)$	0.5	0.3	0.2

On peut également vérifier que la somme des probabilités fait 1.

La loi jointe et les lois marginales peuvent donc être données sous forme du tableau suivant

$\mathbb{P}(X = x, Y = y)$	$y = -1$	$y = 1$	$y = 2$	Loi marginale $\mathbb{P}(X = x)$
$x = -2$	0.2	0.2	0.05	0.45
$x = 0$	0.1	0.1	0.05	0.25
$x = 1$	0.2	0	0.1	0.3
Loi marginale $\mathbb{P}(Y = y)$	0.5	0.3	0.2	**1**

4. Les variables X et Y sont indépendantes si et seulement si pour tout $x \in X(\Omega)$ et $y \in Y(\Omega)$, $\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y)$. Pour montrer que les v.a. ne sont pas indépendantes, il suffit donc de trouver un contre exemple. On remarque dans le tableau de la loi jointe que $\mathbb{P}(X = 1, Y = 1) = 0$, alors que d'après les lois marginales de X et Y, $\mathbb{P}(X = 1)\mathbb{P}(Y = 1) = 0.3 \times 0.3 \neq 0$. Les deux variables ne sont donc pas indépendantes.

5. On utilise la définition de la loi conditionnelle (règle de bayes) $\mathbb{P}(X=x|Y=1)=\frac{\mathbb{P}(X=x,Y=1)}{\mathbb{P}(Y=1)}$. D'après le tableau de la loi jointe du couple qui donne $\mathbb{P}(X=x,Y=1)$ et le tableau de la loi marginale de Y (qui donne $\mathbb{P}(Y=1)=0.3$), la loi conditionnelle $\mathbb{P}(X=x|Y=1)$ se résume dans le tableau suivant

x	-2	0	1
$\mathbb{P}(X=x\|Y=1)$	$\frac{0.2}{0.3}=\frac{2}{3}$	$\frac{0.1}{0.3}=\frac{1}{3}$	$\frac{0}{0.3}=0$

6. L'espérance conditionnelle est obtenue en appliquant la définition, c'est-à-dire

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X|Y=1] &= \sum_{x\in\mathcal{X}} x\,\mathbb{P}(X=x|Y=1)\\ &= -2\times\frac{2}{3}+0\times\frac{1}{3}+1\times 0\\ &= -\frac{4}{3}.\end{aligned}$$

7. Pour calculer $\mathbb{E}[X|Y\neq 2]$ on utilise la définition de l'espérance conditionnelle :

$$\mathbb{E}[X|Y\neq 2] = \sum_{x\in X(\Omega)} x\,\mathbb{P}(X=x|Y\neq 2).$$

On doit donc d'abord calculer $\mathbb{P}(X=x|Y\neq 2)$. En appliquant la règle de Bayes, on a

$$\mathbb{P}(X=x|Y\neq 2)=\frac{\mathbb{P}(X=x,Y\neq 2)}{\mathbb{P}(Y\neq 2)}$$

Or l'évènement $\{Y\neq 2\}=\{Y=-1\}\cup\{Y=1\}$ avec une union disjointe. Donc

$$\mathbb{P}(X=x,Y\neq 2)=\mathbb{P}(X=x,Y=-1)+\mathbb{P}(X=x,Y=1)$$

ainsi que

$$\mathbb{P}(Y\neq 2)=\mathbb{P}(Y=-1)+\mathbb{P}(Y=1)$$

Donc

$$\mathbb{P}(X=x|Y\neq 2)=\frac{\mathbb{P}(X=x,Y=-1)+\mathbb{P}(X=x,Y=1)}{\mathbb{P}(Y=-1)+\mathbb{P}(Y=1)}=\frac{\mathbb{P}(X=x,Y=-1)+\mathbb{P}(X=x,Y=1)}{0.8}$$

En appliquant cette formule, d'après le tableau de la loi jointe du couple (X,Y), on obtient la loi conditionnelle résumée dans le tableau suivant :

x	-2	0	1
$\mathbb{P}(X=x\|Y\neq 2)$	$\frac{0.2+02}{0.8}=\frac{1}{2}$	$\frac{0.1+0.1}{0.8}=\frac{1}{4}$	$\frac{0.2+0}{0.8}=\frac{1}{4}$

Attention ! $\mathbb{P}(X=x|Y\neq 2)\neq 1-\mathbb{P}(X=x|Y=2)$. Ici, par exemple si on prend $x=-2$, on a

$$\begin{aligned}1-\mathbb{P}(X=x|Y=2) &= 1-\frac{\mathbb{P}(X=-2,Y=2)}{\mathbb{P}(Y=2)}\\ &= 1-\frac{0.05}{0.2}\\ &= \frac{3}{4}\end{aligned}$$

alors que $\mathbb{P}(X=-2|Y\neq 2)=\frac{1}{2}$.

On en déduite ensuite l'espérance conditionnelle :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X|Y\neq 2] &= \sum_{x\in X(\Omega)} x\,\mathbb{P}(X=x|Y\neq 2)\\ &= -2\times\frac{1}{2}+0\times\frac{1}{4}+1\times\frac{1}{4}\\ &= -\frac{3}{4}.\end{aligned}$$

8. On applique la propriété de l'espérance (formule de transfert) : pour toute fonction φ, on a

$$\mathbb{E}[\varphi(X,Y)] = \sum_{x\in X(\Omega)} \sum_{y\in Y(\Omega)} \varphi(x,y)\mathbb{P}(X=x,Y=y)$$

Pour le cas particulier de la v.a produit, on a donc $\varphi(X,Y) = XY$. Donc

$$\mathbb{E}[XY] = \sum_{x\in X(\Omega)} \sum_{y\in Y(\Omega)} xy\mathbb{P}(X=x,Y=y)$$

Le tableau suivant donne les calculs intermédiaires de $xy\mathbb{P}(X=x,Y=y)$ On obtient ainsi $\mathbb{E}[XY] = -0.2$

$xy\mathbb{P}(X=x,Y=y)$	$y=-1$	$y=1$	$y=2$
$x=-2$	$2\times 0.2 = 0.4$	$-2\times 0.2 = -0.4$	$-4\times 0.05 = -0.2$
$x=0$	$0\times 0.1 = 0$	$0\times 0.1 = 0$	$0\times 0.05 = 0$
$x=1$	$-1\times 0.2 = -0.2$	$1\times 0 = 0$	$2\times 0.1 = 0.2$

9. On sait que $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}[XY]-\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$. On calcule donc les espérances $\mathbb{E}[X]$ et $\mathbb{E}[Y]$ en utilisant la définition de l'espérance :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \sum_{x\in\mathcal{X}} x\,\mathbb{P}(X=x)\\ &= -2\times 0.45 + 0\times 0.25 + 1\times 0.3\\ &= -0.6\end{aligned}$$

De la même façon

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y] &= -1\times 0.5 + 1\times 0.3 + 2\times 0.2\\ &= 0.2\end{aligned}$$

On obtient finalement $\mathrm{Cov}(X,Y) = -0.2 - (-0.6)\times 0.2 = -0.08$.

Solution 2

1. La densité de X est

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(x,y)dy, \qquad x\in\mathbb{R}.$$

On a $X(\Omega) = [0,2]$. Par conséquent, pour tout $x \notin [0,2]$, on a

$$f_X(x) = 0.$$

Pour tout $x\in[0,2]$, on a

$$\begin{aligned}f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(x,y)dy = \int_0^2 \frac{1}{2(e^2-1)}xe^y dy = \frac{1}{2(e^2-1)}x\int_0^2 e^y dy\\ &= \frac{1}{2(e^2-1)}x\left[e^y\right]_0^2 = \frac{1}{2(e^2-1)}x\times(e^2-1) = \frac{x}{2}.\end{aligned}$$

Au final, la densité de X est

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{si } x\in[0,2],\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

2. La densité de Y est

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(x,y)dx, \qquad y\in\mathbb{R}.$$

On a $Y(\Omega) = [0,2]$. Par conséquent, pour tout $y \notin [0,2]$, on a

$$f_Y(y) = 0.$$

Pour tout $y \in [0,2]$, on a

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(x,y)dx = \int_0^2 \frac{1}{2(e^2-1)} x e^y dx = \frac{1}{2(e^2-1)} e^y \int_0^2 x dx \\ &= \frac{1}{2(e^2-1)} e^y \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = \frac{1}{e^2-1} e^y. \end{aligned}$$

Au final, la densité de Y est

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{e^2-1} e^y & \text{si } y \in [0,2], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

3. En utilisant le résultat de la question 1-, on montre que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, on a

$$f_{(X,Y)}(x,y) = f_X(x) f_Y(y).$$

Autrement dit, la densité du couple de variables aléatoires réelles (X,Y) est égale au produit des densités respectives de X et de Y. On en conclut que les variables aléatoires réelles X et Y sont indépendantes.

4. $Z = e^Y$. On a $Y(\Omega) = [0,2]$. Par conséquent $Z(\Omega) = [1, e^2]$. Pour tout $z \notin Z(\Omega)$, on a

$$\mathbb{P}(Y \leq z) = 0.$$

Pour tout $z \in Z(\Omega)$, on a

$$\mathbb{P}(Z \leq z) = \mathbb{P}\left(e^Y \leq z\right) = \mathbb{P}\left(Y \leq \ln z\right) = \int_{-\infty}^{\ln z} f_Y(y)dy = \int_0^{\ln z} \frac{1}{e^2-1} e^y dy = \frac{1}{e^2-1}\left[e^y\right]_0^{\ln z} = \frac{z-1}{e^2-1}.$$

Au final, la fonction de répartition de Z est

$$F_Z(z) = \begin{cases} \frac{z-1}{e^2-1} & \text{si } z \in [1, e^2], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Comme

$$\left(\frac{z-1}{e^2-1}\right)' = \frac{1}{e^2-1},$$

la densité de Z est

$$f_Z(z) = F_Z'(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{e^2-1} & \text{si } z \in [1, e^2], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

5. $\mathbb{E}[Z] = \int_{-\infty}^{\infty} z f_Z(z)dz = \frac{1}{e^2-1}\int_1^{e^2} z dz = \frac{1}{e^2-1}\left[\frac{z^2}{2}\right]_1^{e^2} = \frac{e^4-1}{2(e^2-1)} = \frac{(e^2-1)(e^2+1)}{2(e^2-1)} = \frac{e^2+1}{2}$

6.

$$\begin{aligned} \mathbb{V}[Z] &= \mathbb{E}[Z^2] - (\mathbb{E}[Z])^2 = \int_{-\infty}^{\infty} z^2 f_Z(z)dz - \left(\frac{e^2+1}{2}\right)^2 = \frac{1}{e^2-1}\int_1^{e^2} z^2 dz - \left(\frac{e^2+1}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{e^2-1}\left[\frac{z^3}{3}\right]_1^{e^2} - \left(\frac{e^2+1}{2}\right)^2 = \frac{e^6-1}{3(e^2-1)} - \frac{e^4+2e^2+1}{4} = \frac{e^6-3e^4+3e^2-1}{12(e^2-1)} = \frac{(e^2-1)^3}{12(e^2-1)} = \frac{(e^2-1)^2}{12} \end{aligned}$$

Remarque : On peut aussi sans faire de calcul dire que d'après sa densité, Z est uniforme sur $[a=1, b=e^2]$, donc son espérance vaut $\frac{a+b}{2} = \frac{1+e^2}{2}$ et sa variance vaut $\frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(e^2-1)^2}{12}$

Solution 3

1. L'EMV de θ est défini par

$$\widehat{\theta} = \arg\max_{\theta} \ln L(\theta),$$

où $\ln L(\theta)$ est la log-vraisemblance de θ qui, par indépendance et distribution identique de l'échantillon, s'écrit :

$$\begin{aligned} \ln L(\theta) &= \ln \mathbb{P}(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n; \theta) = \log \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i = x_i; \theta) \\ &= \log \prod_{i=1}^{n} (\theta^{x_i}(1-\theta)^{1-x_i}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i \log\theta + \sum_{i=1}^{n}(1-x_i)\log(1-\theta). \end{aligned} \tag{1}$$

Sa dérivée, ainsi donnée par

$$\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial\theta} = \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{1}{1-\theta}\sum_{i=1}^{n}(1-x_i), \tag{2}$$

s'annule lorsque (en multipliant par $\theta(1-\theta)$ des deux côtés de l'égalité)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{1}{1-\theta}\sum_{i=1}^{n}(1-x_i) &= 0 \\ (1-\theta)\sum_{i=1}^{n} x_i - \theta\sum_{i=1}^{n}(1-x_i) &= 0 \\ \sum_{i=1}^{n} x_i - n\theta &= 0 \\ \widehat{\theta} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i. \end{aligned} \tag{3}$$

L'EMV $\widehat{\theta}$ correspond à la moyenne empirique $\overline{X}_n$.

2. On a $\mathbb{E}[\widehat{\theta}] = \mathbb{E}[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[X_i] = \theta$ (l'espérance de $X_i \sim \mathcal{B}(\theta)$ est θ). L'estimateur $\widehat{\theta}$ est donc sans biais.

3. Sa variance est $\mathrm{Var}(\widehat{\theta}) = \mathrm{Var}(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}(X_i) = \frac{1}{n^2}n\theta(1-\theta) = \frac{\theta(1-\theta)}{n}$ (la variance de $X_i \sim \mathcal{B}(\theta)$ est $\theta(1-\theta)$ et l'échantillon est i.i.d).

$*$ Question non posée : Pour tout estimateur sans biais de θ, la variance minimale est donnée par la borne inférieure de Cramer-Rao. Soit B cette borne à calculer. Celle-ci est définie par

$$B = -\left(\mathbb{E}\left[\frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial^2\theta}\right]\right)^{-1}.$$

On a

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial^2\theta} &= \frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial\theta}\right\} = \frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{1-\theta}\sum_{i=1}^{n}(1-X_i)\right\} = -\frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{(1-\theta)^2}\sum_{i=1}^{n}(1-X_i) \\ \mathbb{E}\left[\frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial^2\theta}\right] &= -\frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[X_i] - \frac{1}{(1-\theta)^2}\sum_{i=1}^{n}(1-\mathbb{E}[X_i]) = -\frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n}\theta - \frac{1}{(1-\theta)^2}\sum_{i=1}^{n}(1-\theta) = -\frac{n}{\theta} - \frac{n}{(1-\theta)} \\ -\left(\mathbb{E}\left[\frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial^2\theta}\right]\right)^{-1} &= -\left(-\frac{n}{\theta} - \frac{n}{(1-\theta)}\right)^{-1} = \left(\frac{n(1-\theta)+n\theta}{\theta(1-\theta)}\right)^{-1} = \frac{\theta(1-\theta)}{n}. \end{aligned} \tag{4}$$

Par conséquent, la borne inférieure de Cramer-Rao est égale à la variance de l'EMV $\widehat{\theta}$. Ce dernier est donc efficace pour θ.

Remarque : On aurait pu aussi utiliser la forme $B = \left(n\mathbb{E}\left[\left(\frac{\partial \ln \mathbb{P}(X_i=x_i;\theta)}{\partial\theta}\right)^2\right]\right)^{-1}$ ou encore $B = -\left(n\mathbb{E}\left[\left(\frac{\partial^2 \ln \mathbb{P}(X_i=x_i;\theta)}{\partial^2\theta}\right)\right]\right)$

4. $\widehat{\theta}$ est sans biais ; de plus, on a $\lim_{n\to\infty}\mathrm{Var}(\widehat{\theta}) = \lim_{n\to\infty}\frac{\theta(1-\theta)}{n} = 0$. Il est donc convergent.

5. D'après le TCL, la suite de v.a. $(\overline{X}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une v.a de loi normale $\mathcal{N}(\mathbb{E}[\overline{X}_n], \mathbb{V}(\overline{X}_n))$. Donc la loi limite de $\widehat{\theta} = \overline{X}_n$ est $\mathcal{N}(\theta, \frac{\theta(1-\theta)}{n})$.