**Consignes** :
- Sont interdits : Documents, calculettes, téléphones, écouteurs, ordinateurs, tablettes.
- Il est interdit de composer avec un crayon.
- Votre feuille double d'examen doit porter, à l'emplacement réservé, vos nom, prénom, et signature.
- Cette zone réservée doit être cachée par collage.
- Vos feuilles intercalaires doivent êtres toutes numérotées.
- Le barème est donné à titre indicatif.
- Toute réponse non justifiée comptera pour zéro.

**Exercice 1** *(5 pts)* Un téléopérateur reçoit en moyenne dix appels par jour. On suppose que le nombre d'appels est distribué selon une loi de Poisson. Calculer la probabilité qu'un jour le téléopérateur reçoive :

1. aucun appel ;
2. 2 appels ;
3. au moins 3 appels.

Notez que le résultat final du calcul de chacune de ces trois probabilités peut être donné sous la forme d'une expression numérique simplifiée et il n'est donc pas nécessaire d'utiliser la calculette.

**Solution 1**

On note par $X$ la variable aléatoire donnant le nombre d'appels reçus par jour par le téléopérateur. Par hypothèse, $X$ est distribuée selon une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ de paramètre $\lambda$ et telle que $\mathbb{E}[X] = 10$. Or, on sait que si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $\mathbb{E}[X] = 10$, donc $\lambda = 10$ (nombre moyen d'appels).

1. Comme $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, on a $\mathbb{P}(X = x) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}$. Donc
$$\mathbb{P}(X = 0) = e^{-10}\frac{10^0}{0!} = e^{-10}$$
2. On appliquant à nouveau la formule de la loi de poisson, on a
$$\mathbb{P}(X = 2) = e^{-10}\frac{10^2}{2!} = 50e^{-10}$$
3. Il s'agit de calculer $\mathbb{P}(X \geq 3)$. Pour calculer cette probabilité, on note que l'évènement
$$\overline{\{X \geq 3\}} = \{X \leq 2\} = \cup_{x=0}^{x=2}\{X = x\}$$
( car $X$ prend uniquement des valeurs entières) qui s'écrit donc sous forme d'une union disjointe d'évènements $\{X = x\}$ pour lesquels on connaît les probabilités (grâce à la loi de $X$). Le passage au complémentaire ici évite d'avoir à écrire une somme infinie pour $\{X \geq 3\}$. On a donc
$$\mathbb{P}(X \geq 3\}) = 1 - \mathbb{P}(\{X \leq 2\}) = 1 - \mathbb{P}(\cup_{x=0}^{x=2}\{X = x\}) = 1 - \sum_{x=0}^{x=2}\mathbb{P}(\{X = x\}) = 1 - e^{-10}\sum_{x=0}^{x=2}\frac{10^x}{x!} = 1 - 61e^{-10}$$
.

**Exercice 2** *(5 pts)* Soit $(X, Y)$ un couple de v.a. de densité jointe :

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } 0 \leq y \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Vérifier qu'il s'agit bien d'une densité.

2. Est-ce que $X$ et $Y$ sont indépendantes ?
3. Déterminer une densité de $X$.
4. Déterminer une densité de $Y$.
5. Calculer $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

**Solution 2**

1. Il est clair que $f(x, y) \geq 0 \ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, et on a

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy &= \int_0^1 \left(\int_0^x \frac{1}{x}dy\right) dx \\
&= \int_0^1 \frac{1}{x}\,[y]_0^x \, dx \\
&= \int_0^1 \frac{1}{x}\,[x]\, dx \\
&= [x]_0^1 = 1.
\end{aligned}$$

Donc $f$ est bien une densité.

2. $X$ et $Y$ ne sont clairement pas indépendantes du fait de la relation d'ordre entre $X$ et $Y$ (les valeurs de l'une dépendent donc des valeurs de l'autre).

3. La densité de $X$ est $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dy$, $x \in \mathbb{R}$. On a $X(\Omega) = [0, 1]$. Par conséquent, pour tout $x \notin [0, 1]$, on a

$$f_X(x) = 0.$$

Pour tout $x \in [0, 1]$, on a

$$f_X(x) = \int_0^x \frac{1}{x}dy = 1.$$

La densité de $X$ est donc définie par

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,1], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La densité de $Y$ est $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dx$, $y \in \mathbb{R}$. On a $Y(\Omega) = [0, 1]$. Donc, pour tout $y \notin [0, 1]$, on a

$$f_Y(y) = 0.$$

Pour tout $y \in [0, 1]$, on a

$$f_Y(y) = \int_y^1 \frac{1}{x}dx = [\ln x]_y^1 = -\ln y.$$

La densité de $Y$ est donc donnée par :

$$f_Y(y) = \begin{cases} -\ln y & \text{si } y \in [0,1], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

4. En utilisant les résultats de la question 1-, on a

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx = \int_0^1 x \times 1 dx = \int_0^1 x dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2},$$

en faisant une intégration par parties,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y) &= \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy = \int_0^1 y \times (-\ln y) dy = -\int_0^1 y \ln y dy \\
&= -\left( \left[ \frac{y^2}{2} \ln y \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{y^2}{2} \times \frac{1}{y} dy \right) \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 y dy = \frac{1}{2} \left[ \frac{y^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(XY) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy f(x,y) dx dy = \int_0^1 \left( \int_0^x xy \frac{1}{x} dy \right) dx \\
&= \int_0^1 \left( \int_0^x y dy \right) dx = \int_0^1 \left[ \frac{y^2}{2} \right]_0^x dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{2} \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{6} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{24}.$$

**Exercice 3** *(5 pts)* Soient $X_1$ et $X_2$ deux v.a Gaussiennes décorrélées où $X_1 \sim \mathcal{N}(0,1)$, $X_2 \sim \mathcal{N}(1,1)$. Soit $\boldsymbol{Y} = (Y_1, Y_2)^\top$ le vecteur aléatoire tel que $\boldsymbol{Y} = \mathbf{A}\boldsymbol{X} + \mathbf{b}$, où $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2)^\top$ et $\mathbf{b} = (1,2)^\top$.

1. Déterminer $\mathbb{E}(\boldsymbol{Y})$ et $\mathrm{cov}(\boldsymbol{Y})$.
2. En déduire la loi de $\boldsymbol{Y}$.
3. En déduire la valeur du coefficient de corrélation linéaire $\rho_Y$ entre $Y_1$ et $Y_2$.

**Solution 3**

1. Par définition de $\boldsymbol{X}$ on a $\mathbb{E}(\boldsymbol{X}) = (\mathbb{E}(X_1), \mathbb{E}(X_2))^\top = (0,1)^\top$. Par linéarité de l'espérance on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\boldsymbol{Y}) &= \mathbf{A}\mathbb{E}(\boldsymbol{X}) + \mathbf{b} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

La matrice de covariance de $\boldsymbol{X}$ est donnée par $\begin{pmatrix} \mathrm{Var}(X_1) & \mathrm{cov}(X_1,X_2) \\ \mathrm{cov}(X_1,X_2) & \mathrm{Var}(X_2) \end{pmatrix}$. D'après l'énoncé les v.a $X_1$ et $X_2$ sont décorrélées et $\mathrm{Var}(X_1) = \mathrm{Var}(X_2) = 1$. On a donc $\mathrm{cov}(X_1,X_2) = 0$ et $\mathrm{cov}(\boldsymbol{X}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I}$. Au final, on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{cov}(\boldsymbol{Y}) &= \mathbf{A}\,\mathrm{cov}(\boldsymbol{X})\mathbf{A}^\top = \mathbf{A}\mathbf{A}^\top \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

2. Comme $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2)^\top$ est un vecteur gaussien et $\boldsymbol{Y}$ est de la forme $\boldsymbol{Y} = \mathbf{A}\boldsymbol{X} + \mathbf{b}$, alors $\boldsymbol{Y}$ est aussi un vecteur gaussien. Son espérance et sa matrice de covariance sont celles calculées dans la question 2-.
3. On a $\rho_Y = \frac{\mathrm{cov}(Y_1,Y_2)}{\sqrt{\mathrm{Var}(Y_1)\,\mathrm{Var}(Y_2)}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$.

**Exercice 4** *(5 pts).* Soit $X$ une v.a. Gaussienne de densité :

$$f(x;\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\,\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \forall x \in \mathbb{R}$$

avec $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$. On dispose d'un $n$-échantillon $(X_1, \cdots, X_n)$ i.i.d selon la loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Soit $\mu$ le paramètre inconnu à estimer (on suppose que la variance $\sigma^2$ est connue).

1. Calculer la borne inférieure de Cramér-Rao pour un estimateur sans biais de l'espérance $\mu$.
2. Soit $\widehat{\mu}$ l'estimateur du maximum de vraisemblance de $\mu$
   (a) Définir et calculer $\widehat{\mu}$.
   (b) Montrer qu'il est efficace.
   (c) Montrer qu'il est convergent.
   (d) Quelle est sa loi ?

**Solution 4**

1. Soit $B$ la borne à calculer. Celle-ci dans ce cas est définie par

$$B = -\frac{1}{\mathbb{E}\left[\left(\frac{\partial^2 \ln L(\mu)}{\partial^2 \mu}\right)\right]}$$

(on peut utiliser dans ce cas i.i.d aussi la forme $B = \frac{1}{n\mathbb{E}\left[\left(\frac{\partial \ln f(x_i;\mu,\sigma^2)}{\partial \mu}\right)^2\right]}$ ou encore $B = -\frac{1}{n\mathbb{E}\left[\left(\frac{\partial^2 \ln f(x_i;\mu,\sigma^2)}{\partial^2 \mu}\right)\right]}$), où $\ln L(\mu)$ est la log-vraisemblance de $\mu$ pour le $n$-échantillon $(X_1, \cdots, X_n)$, qui s'écrit :

$$\begin{aligned} \ln L(\mu) &= \ln f(x_1, \ldots, x_n; \mu) = \log \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\,\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)^2} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \log \frac{1}{\sigma\sqrt{2\,\pi}} - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 \,. \qquad (1) \end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L(\mu)}{\partial \mu} &= \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu) \qquad (2) \\ \frac{\partial^2 \ln f(x;\mu)}{\partial^2 \mu} &= -\frac{n}{\sigma^2}. \qquad (3) \end{aligned}$$

Par conséquent, la borne inférieure de Cramer-Rao est donnée par $B = \frac{\sigma^2}{n}$.

(a) L'EMV de $\mu$ est défini par

$$\widehat{\mu} = \arg\max_{\mu\in\mathbb{R}} \ln L(\mu),$$

qui correspond au zéro de la fonction de log-vraisemble en $\mu$. D'après (1) et (2), les zéros de la fonction $\ln L(\mu)$ sont définis par

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu) = \sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu = 0$$

ce qui correspond à

$$\widehat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i,$$

soit la moyenne empirique !

(b) on a $\mathbb{E}[\widehat{\mu}] = \mathbb{E}[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[X_i] = \mu$. L'estimateur $\widehat{\mu}$ est donc sans biais. Sa variance est $\mathrm{Var}(\widehat{\mu}) = \mathrm{Var}(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}(X_i) = \frac{1}{n^2}n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$. Il est donc à variance minimale. Par conséquent, $\widehat{\mu}$ est un estimateur efficace pour $\mu$.

(c) $\widehat{\mu}$ est sans biais ; de plus, on a $\lim_{n\to\infty}\mathrm{Var}(\widehat{\mu}) = \lim_{n\to\infty}\frac{\sigma^2}{n} = 0$. Il est donc convergent.

(d) $\widehat{\mu} \sim \mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ ($\widehat{\mu}$ ici est une somme pondérée de variables Gaussiennes, il est donc gaussien).