Consignes :
- Sont interdits : Documents, calculettes, téléphones, écouteurs, ordinateurs, tablettes.
- Il est interdit de composer avec un crayon.
- Votre feuille double d'examen doit porter, à l'emplacement réservé, vos nom, prénom, et signature.
- Cette zone réservée doit être cachée par collage.
- Vos feuilles intercalaires doivent êtres toutes numérotées.
- Le barème est donné à titre indicatif.
- Toute réponse non justifiée comptera pour zéro.

Exercice 1 *(5 pts)* Trois machines fabriquant des stylos de même type sont en test. La première sort en moyenne 3 % de stylos défectueux, la deuxième 8 % et la troisième 10 %. On en inspecte 500 provenant de la première, 300 provenant de la deuxième et 200 provenant de la troisième. On tire un stylo au hasard dans l'ensemble des stylos inspectés ; il est défectueux. Quelle est la probabilité qu'il ait été fabriqué

1. par la première machine ?
2. par la deuxième ? la troisième ?

Supposons que pour une quatrième machine le nombre de défauts par stylo dans un ensemble de 20 stylos tirés de façon indépendante suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 0.5$. On divise l'ensemble en 10 lots de deux stylos.

3. Quelle est la loi la v.a. Y représentant le nombre de défauts dans un lot ?
4. Quelle est la loi la v.a. Z représentant le nombre de lots sans défauts ?
5. Trouver $\mathbb{E}(Z)$.

Solution 1 Pour résoudre cet exercice, on utilise le théorème de Bayes et la formule des probabilités totales qui pour rappel s'énonce ainsi : Soit un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Si $(B_i)_{i\in I}$ un système complet d'événements (i.e événements formant une partition de l'univers : deux à deux incompatibles et leur union fait l'univers), et si quel que soit $i \in I, \mathbb{P}(B_i) > 0$, alors, pour tout événement A

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i).$$

et dans le cas de n évènements disjoints (avec $\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) = 1$ et $\mathbb{P}(A_i) > 0\,\forall i$), le théorème de Bayes est donné par

$$\mathbb{P}(A_i|B) = \frac{\mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B|A_i)}{\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B|A_i)} \tag{1}$$

où on a appliqué la formule des probabilités totales pour le calcul de $\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i)$.

Soit B l'évènement "le stylo est défectueux" et A_i l'évènement "le stylo provient de la machine i", pour $i = 1, 2, 3$. Lorsque l'on tire un stylo au hasard les probabilités dites a priori qu'il provienne de chacune des machines sont évidemment

$$\mathbb{P}(A_1) = 0.50, \quad \mathbb{P}(A_2) = 0.3 \quad \mathbb{P}(A_3) = 0.2.$$

Lorsque l'on sait qu'il est défectueux, événement noté B, il faut alors calculer les probabilités conditionnelles :

$$\mathbb{P}(A_1|B), \quad \mathbb{P}(A_2|B), \quad \mathbb{P}(A_3|B).$$

Comme on connaît $\mathbb{P}(B|A_1) = 0.03$, $\mathbb{P}(B|A_2) = 0.08$ et $\mathbb{P}(B|A_3) = 0.1$, la deuxième formule de Bayes (equation (1)) permet d'écrire :

$$\mathbb{P}(A_i|B) = \frac{\mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B|A_i)}{\sum_{i=1}^3 \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B|A_i)}$$

et on a donc :

1.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_1|B) &= \frac{\mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(B|A_1)}{\sum_{i=1}^{3}\mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B|A_i)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(B|A_1)}{\mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(B|A_1)+\mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(B|A_2)+\mathbb{P}(A_3)\mathbb{P}(B|A_3)} \\
&= \frac{0.5\times 0.03}{0.5\times 0.03+0.3\times 0.08+0.2\times 0.1} \\
&= \frac{0.5\times 0.03}{0.059} = \frac{15}{59}
\end{aligned}$$

idem pour les deux autres cas et on trouve

2.

$$\mathbb{P}(A_1|B) = \frac{24}{59}, \quad \mathbb{P}(A_3|B) = \frac{20}{59}$$

Soit X la v.a. représentant le nombre de défauts dans l'ensemble de 20 stylos. On a X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 0.5$: $X \sim \mathcal{P}(0.5)$ donc $\mathbb{P}(X = k) = \frac{0.5^k}{k!}e^{-0.5}$.

3. Soit Y la v.a. représentant le nombre de défauts dans un lot (de 2 stylos indépendants). On peut donc écrire $Y = \sum_{i=1}^{2} X_i$ avec les X_i sont i.i.d de loi $\mathcal{P}(0.5)$.
   Par stabilité de la loi Poisson, la loi de Y est donc $\mathcal{P}(2\times 0.5) = \mathcal{P}(1)$ et on a $\mathbb{P}(Y = k) = \frac{1}{k!e}$
4. Soit Z la v.a. représentant le nombre de lots sans défaut. On a 10 lots indépendants, donc si on considère l'épreuve suivante à deux issues "avoir un lot sans défaut ou avec défaut", cette épreuve est de Bernoulli de paramètre $p = \mathbb{P}(L)$ où L est l'évènement "avoir un lot sans défaut".
   Donc on a $p = \mathbb{P}(Y = 0) = \frac{1}{e}$. Puisque les 10 lots sont indépendants de même loi $\mathcal{B}(\frac{1}{e})$ alors $Z \sim \mathcal{B}(10, \frac{1}{e})$.
5. $\mathbb{E}(Z) = \frac{10}{e}$.

Exercice 2 *(5 pts)*

1. On rappelle l'inégalité de Markov : Si Y est une v.a. réelle positive d'espérance $\mathbb{E}(Y) < \infty$, alors, pour tout $\epsilon > 0$, on a : $\mathbb{P}\big(Y \geqslant \epsilon\big) \leqslant \frac{\mathbb{E}(Y)}{\epsilon}$. On rappelle aussi que pour toute v.a réelle T, on a $\mathbb{E}(|T|) \leqslant \sqrt{\mathbb{E}(T^2)}$.
   Soit X une v.a. de Bernoulli de loi $\mathcal{B}(\frac{1}{2})$. Montrer que, pour tout $\epsilon > 0$ on a : $\mathbb{P}\left(\left|X - \frac{1}{2}\right| \geqslant \epsilon\right) \leqslant \frac{1}{2\epsilon}$.
2. On rappelle l'inégalité de Bienaymé-Chebychev : Si X est une v.a. réelle d'espérance $\mathbb{E}(X)$ et de variance $\mathbb{V}(X) < \infty$, alors, pour tout $\epsilon > 0$, on a : $\mathbb{P}\big(|X - \mathbb{E}[X]| \geqslant \epsilon\big) \leqslant \frac{\mathbb{V}(X)}{\epsilon^2}$.
   Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a. i.i.d. de loi $\mathcal{B}(\frac{1}{2})$. On pose $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.
   Montrer que la suite $(\overline{X}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers $\frac{1}{2}$.
3. Soit la v.a $\overline{Z}_n = \sqrt{n}(2\overline{X}_n - 1)$. Que elle est la loi limite de la suite de v.a. $(\overline{Z}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$? donner la (les) valeur(s) de son (ses) paramètre(s).

Solution 2

1. Inégalité de Markov : Si Y est une v.a. réelle positive d'espérance $\mathbb{E}(Y) < \infty$, alors, pour tout $\epsilon > 0$, on a : $\mathbb{P}\big(Y \geqslant \epsilon\big) \leqslant \frac{\mathbb{E}(Y)}{\epsilon}$. X une v.a. de loi Bernoulli $\mathcal{B}(\frac{1}{2})$ donc $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{2}$. En posant la v.a. $Y = X - \mathbb{E}(X)$, selon l'inégalité de Markov, pour tout $\epsilon > 0$, on a : $\mathbb{P}\big(|Y| \geqslant \epsilon\big) \leqslant \frac{\mathbb{E}(|Y|)}{\epsilon}$. (la valeur absolue de Y étant une v.a réelle positive).
   De plus, on sait que $\mathbb{E}(|Y|) \leqslant \sqrt{\mathbb{E}(Y^2)}$ donc $\mathbb{E}(|Y|) \leqslant \sqrt{\mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}[X])^2\right)} = \sqrt{\mathbb{V}(X)} = \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2})} = \frac{1}{2}$. Donc au final, pour tout $\epsilon > 0$, on a : $\mathbb{P}\left(\left|X - \frac{1}{2}\right| \geqslant \epsilon\right) \leqslant \frac{1}{2\epsilon}$.

2. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r. i.i.d. admettant un moment d'ordre 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Alors $(\overline{X}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers $\mathbb{E}(X_1)$.

Preuve. On a, par linéarité et distribution identique, $\mathbb{E}(\overline{X}_n) = \mathbb{E}(X_1)$ et, par indépendance et distribution identique,

$$\mathbb{V}(\overline{X}_n) = \frac{1}{n^2}\mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{V}(X_i) = \frac{1}{n}\mathbb{V}(X_1).$$

En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on obtient

$$\mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mathbb{E}(X_1)\right| \geqslant \epsilon\right) \leqslant \frac{\mathbb{V}\left(\overline{X}_n\right)}{\epsilon^2} = \frac{\mathbb{V}(X_1)}{n\epsilon^2}.$$

D'où

$$0 \leqslant \lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mathbb{E}(X_1)\right| \geqslant \epsilon\right) \leqslant \frac{\mathbb{V}(X_1)}{\epsilon^2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0,$$

soit

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mathbb{E}(X_1)\right| \geqslant \epsilon\right) = 0.$$

Cela traduit la convergence en probabilité de $(\overline{X}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers $\mathbb{E}(X_1)$. Et on a $\mathbb{E}(X_1) = \frac{1}{2}$

3. d'après le TCL, la suite de v.a. $(\overline{Z}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tel que $Z_n = \frac{\overline{X}_n - \mathbb{E}(\overline{X}_n)}{\sqrt{\mathbb{V}(\overline{X}_n)}} = \frac{\overline{X}_n - \mathbb{E}(X_1)}{\sqrt{\frac{1}{n}\mathbb{V}(X_1)}} = \frac{\overline{X}_n - \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{n}\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2})}} = \sqrt{n}(2\overline{X}_n - 1)$ converge vers une v.a de loi normale centrée réduite.

Exercice 3 *(5 pts)* Soit X une v.a. gaussienne de densité : $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}, \forall x \in \mathbb{R}$. On note par $\Phi(x)$ sa fonction de répartition.

1. Calculer $\mathbb{E}(X+1)$ et $\mathbb{V}(-2X)$
2. On pose $Y = e^{|X|}$.
   (a) Déterminer la fonction de répartition de Y, notée $F_Y(x)$, en fonction de $\Phi(.)$.
   (b) Déterminer la densité de Y, notée $f_Y(x)$.
3. Soit Z la v.a réelle de densité

$$f_Z(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}\varphi(\ln(x)) & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

   (a) Déterminer la fonction de répartition de Z, notée $F_Z(x)$, en fonction de $\Phi(.)$
   (b) Calculer $\mathbb{E}(Z)$

Solution 3

1. X sui une loi normale centrée réduite. Donc en utilisant la linéarité de l'espérance et la propriété quadratique de la variance on trouve : $\mathbb{E}(X+1) = \mathbb{E}(X) + 1 = 1$ et $\mathbb{V}(-2X) = (-2)^2\mathbb{V}(X) = 4$
2. On a $X(\Omega) = \mathbb{R}$. Donc $(|X|)(\Omega) = [0, \infty[$ et $Y(\Omega) = [1, \infty[$. Par conséquent, pour tout $x < 1$, on a

$$\mathbb{P}(Y \leqslant x) = 0.$$

Pour tout $x \geqslant 1$, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y \leqslant x) &= \mathbb{P}(e^{|X|} \leqslant x) = \mathbb{P}(|X| \leqslant \ln x) \\ &= \mathbb{P}(-\ln x \leqslant X \leqslant \ln x) \\ &= \mathbb{P}(X \leqslant \ln x) - \mathbb{P}(X \leqslant -\ln x). \end{aligned}$$

Au final, en notant $\Phi(x)$ la fonction de répartition de X, la fonction de répartition de Y est

$$F_Y(x) = \begin{cases} \Phi(\ln x) - \Phi(-\ln x) & \text{si } x \geqslant 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

comme $-\ln x \leqslant 0$ pour tout $x \geqslant 1$, alors

$$F_Y(x) = \begin{cases} 2\Phi(\ln x) - 1 & \text{si } x \geqslant 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par dérivation, on en déduit la densité de Y :

$$f_Y(x) = F'_Y(x) = \begin{cases} \frac{2}{x}\varphi(\ln x) & \text{si } x \geqslant 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

3. On a $Z(\Omega) =]0, \infty[$, par conséquent, pour tout $x \leqslant 0$, on a

$$\mathbb{P}(Z \leqslant x) = 0.$$

Pour tout $x > 0$, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z \leqslant x) &= \int_{-\infty}^{x} f_Z(u)du = \int_{0}^{x} f_Z(u)du \\ &= \int_{0}^{x} \frac{1}{u}\varphi(u)du = \int_{0}^{x} \left(\frac{d\ \Phi(\ln u)}{du}\right) du \\ &= [\Phi(\ln u)]_0^x = \Phi(\ln x) - \lim_{x\to-\infty} \Phi(x) = \Phi(\ln x) \end{aligned}$$

Au final, la fonction de répartition de Z est

$$F_Z(x) = \begin{cases} \Phi(\ln x) & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

4. Espérance de Z :

$$\mathbb{E}(Z) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_Z(x)dx = \int_{0}^{\infty} x\frac{1}{x}\varphi(\ln x)dx = \int_{0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x)^2}{2}} dx$$

On posant $t = \ln x$ (donc $t \in \mathbb{R}$, $x = e^t$ et $dx = e^t dt$), on obtient :

$$\mathbb{E}(Z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} e^t dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t^2-2t+1-1)}{2}} dt = e^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-1)^2}{2}} dt = e^{\frac{1}{2}}$$

car $h(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-1)^2}{2}}$ est la densité d'une v.a normale d'espérance 1 et d'écart type 1. Son intégrale sur $\mathbb{R}$ vaut donc 1.

On a donc $\mathbb{E}(Z) = \sqrt{e}$

Exercice 4 *(5 pts)* Soit (X, Y) un couple de v.a. de densité jointe :

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} c\,xy & \text{si } x \geqslant 0,\ y \geqslant 0 \text{ et } x + y \leqslant 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Déterminer la valeur de la constante réelle c.
2. Déterminer une densité de X, puis une densité de Y.

3. Est-ce que X et Y sont indépendantes ?
4. Calculer $\mathbb{P}(Y \leqslant X)$.
5. Calculer $\mathbb{E}\left(\frac{\ln(X+1)}{XY}\right)$.

Solution 4

1. Pour que $f(x)$ soit une densité, il faut que $f_{(X,Y)}(x,y) \geqslant 0$ et $\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x,y)dxdy = 1$. On a :

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(x,y)dxdy &= \int_0^1\int_0^{1-x} cxy\ dx\ dy = \int_0^1\left(\int_0^{1-x} cxy\ dy\right)\ dx \\
&= c\int_0^1 x\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{1-x} dx = c\int_0^1 x\frac{(1-x)^2}{2}dx = \frac{c}{2}\int_0^1 (x^3-2x^2+x)dx \\
&= \frac{c}{2}\left[\frac{x^4}{4}-2\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{c}{2}\times\frac{1}{12} = \frac{c}{24}.
\end{aligned}$$

$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x,y)dxdy = 1$ donc $c = 24$ (valable car $24xy \geqslant 0\ \forall (x,y) \in {\mathbb{R}_+}^2$).

2. La densité de X est

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(x,y)dy, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

On a $X(\Omega) = [0,1]$. Par conséquent, pour tout $x \notin [0,1]$, on a

$$f_X(x) = 0.$$

Pour tout $x \in [0,1]$, on a

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(x,y)dy = \int_0^{1-x} cxydy = cx\int_0^{1-x} ydy \\
&= cx\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{1-x} = \frac{c}{2}(x(1-x))^2.
\end{aligned}$$

Au final, la densité de X est

$$f_X(x) = \begin{cases} 12(x(1-x))^2 & \text{si } x \in [0,1], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La densité de Y est

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(x,y)dx, \qquad y \in \mathbb{R}.$$

On a $Y(\Omega) = [0,1]$. Par conséquent, pour tout $y \notin [0,1]$, on a

$$f_Y(y) = 0.$$

Pour tout $y \in [0,1]$, on a

$$\begin{aligned}
f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(x,y)dx = \int_0^{1-y} cxydx = cy\int_0^{1-y} xdx \\
&= cy\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{1-y} = \frac{c}{2}y(1-y)^2.
\end{aligned}$$

Au final, la densité de Y est

$$f_Y(y) = \begin{cases} 12y(1-y)^2 & \text{si } y \in [0,1], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

3. En utilisant le résultat de la question 1-, on peut voir qu'il existe $x \in [0,1]$ et $y \in [0,1]$ tels que

$$f_{(X,Y)}(x,y) \neq f_X(x) f_Y(y).$$

(eg. $x = 1/2$ et $y = 1/2$). La densité jointe de (X,Y) n'est donc pas égale au produit des densités marginales de X et de Y. On en conclut que les variables aléatoires réelles X et Y ne sont pas indépendantes.
On peut répondre aussi à cette question en disant que du moment qu'il y a un relation entre la valeur de X et celle de X (leur somme est 1), la réalisation de X dépend donc de celle de Y et les deux v.a. ne sont donc pas indépendantes.

4. On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y \leqslant X) &= \int\int_{\{(x,y);\ y \leqslant x\}} f_{(X,Y)}(x,y)dxdy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{y}^{\infty} f_{(X,Y)}(x,y)dxdy \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}}\int_y^{1-y} c\,xydxdy = c\int_0^{\frac{1}{2}} y\left[\int_y^{1-y} xdx\right]dy = c\int_0^{\frac{1}{2}} y\left[\frac{x^2}{2}\right]_y^{1-y} dy \\
&= \frac{c}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} y\left((1-y)^2 - y^2\right)dy = \frac{c}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} y\,(1-2y)\,dy \\
&= \frac{c}{2}\left[\frac{y^2}{2} - \frac{2y^3}{3}\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{c}{2}\left[\frac{1}{8} - \frac{1}{12}\right] = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

5. On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\frac{\ln(X+1)}{XY}\right) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln(x+1)}{xy} f_{(X,Y)}(x,y)dxdy = \int_0^1\int_0^{1-x}\frac{\ln(x+1)}{xy} \times cxy\ dx\ dy \\
&= c\int_0^1\int_0^{1-x}\ln(x+1)\ dx\ dy = c\int_0^1 \ln(x+1)\,[y]_0^{1-x}\,dx = c\int_0^1 \ln(x+1)(1-x)dx
\end{aligned}$$

IPP en posant :

$$\begin{Bmatrix} u &=& \ln(1+x) & v' &=& 1-x \\ u' &=& \dfrac{1}{1+x} & v &=& x - \frac{1}{2}x^2 \end{Bmatrix}$$

donc

$$\begin{aligned}
I &= \int \ln(1+x)(1-x)\,dx \\
&= (x - \tfrac{1}{2}x^2)\ln(1+x) - \int \frac{x - x^2/2}{1+x}\,dx \\
&= (x - \tfrac{1}{2}x^2)\ln(1+x) - \int \left(\frac{x}{1+x} - \frac{1}{2}\frac{x^2}{1+x}\right)dx \\
&= (x - \tfrac{1}{2}x^2)\ln(1+x) - \int \left(1 - \frac{1}{x+1} - \tfrac{1}{2}\left(x - 1 + \frac{1}{1+x}\right)\right)dx \\
&= (x - \tfrac{1}{2}x^2)\ln(1+x) - \left[x - \ln(1+x) - \tfrac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} - x + \ln(1+x)\right)\right] + C \\
&= (x - \tfrac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2})\ln(1+x) + \frac{x^2}{4} - \tfrac{3x}{2} + C
\end{aligned}$$

donc $\mathbb{E}\left(\frac{\ln(X+1)}{XY}\right) = 24 \times \left(2\ln 2 - \frac{5}{4}\right) \simeq 3.27$