Université de Caen | **Partiel du 23 novembre 2017. Durée 2h** | **Probabilités et Statistique 3**
UFR des Sciences | Par Faïcel Chamroukhi | **L3 Maths-MIASHS**

Consignes :
- Sont interdits : Documents, calculettes, téléphones, écouteurs, ordinateurs, tablettes.
- Il est interdit de composer avec un crayon.
- Votre feuille double d'examen doit porter, à l'emplacement réservé, vos nom, prénom, et signature.
- Cette zone réservée doit être cachée par collage.
- Vos feuilles intercalaires doivent êtres toutes numérotées.
- Le barème est donné à titre indicatif.
- Toute réponse non justifiée comptera pour zéro.

Exercice 1 *(5 pts)* Trois machines fabriquant des stylos de même type sont en test. La première sort en moyenne 3 % de stylos défectueux, la deuxième 8 % et la troisième 10 %. On en inspecte 500 provenant de la première, 300 provenant de la deuxième et 200 provenant de la troisième. On tire un stylo au hasard dans l'ensemble des stylos inspectés ; il est défectueux. Quelle est la probabilité qu'il ait été fabriqué

1. par la première machine ?
2. par la deuxième ? la troisième ?

Supposons que pour une quatrième machine le nombre de défauts par stylo dans un ensemble de 20 stylos tirés de façon indépendante suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 0.5$. On divise l'ensemble en 10 lots de deux stylos.

3. Quelle est la loi la v.a. Y représentant le nombre de défauts dans un lot ?
4. Quelle est la loi la v.a. Z représentant le nombre de lots sans défauts ?
5. Trouver $\mathbb{E}(Z)$.

Exercice 2 *(5 pts)*

1. On rappelle l'inégalité de Markov : Si Y est une v.a. réelle positive d'espérance $\mathbb{E}(Y) < \infty$, alors, pour tout $\epsilon > 0$, on a : $\mathbb{P}\big(Y \geqslant \epsilon\big) \leqslant \frac{\mathbb{E}(Y)}{\epsilon}$. On rappelle aussi que pour toute v.a réelle T, on a $\mathbb{E}(|T|) \leqslant \sqrt{\mathbb{E}(T^2)}$.
   Soit X une v.a. de Bernoulli de loi $\mathcal{B}(\frac{1}{2})$. Montrer que, pour tout $\epsilon > 0$ on a : $\mathbb{P}\left(\left|X - \frac{1}{2}\right| \geqslant \epsilon\right) \leqslant \frac{1}{2\epsilon}$.
2. On rappelle l'inégalité de Bienaymé-Chebychev : Si X est une v.a. réelle d'espérance $\mathbb{E}(X)$ et de variance $\mathbb{V}(X) < \infty$, alors, pour tout $\epsilon > 0$, on a : $\mathbb{P}\big(\,|X - \mathbb{E}[X]| \geqslant \epsilon\big) \leqslant \frac{\mathbb{V}(X)}{\epsilon^2}$.
   Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a. i.i.d. de loi $\mathcal{B}(\frac{1}{2})$. On pose $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$.
   Montrer que la suite $(\overline{X}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers $\frac{1}{2}$.
3. Soit la v.a $\overline{Z}_n = \sqrt{n}(2\overline{X}_n - 1)$. Que elle est la loi limite de la suite de v.a. $(\overline{Z}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$? donner la (les) valeur(s) de son (ses) paramètre(s).

Exercice 3 *(5 pts)* Soit X une v.a. gaussienne de densité : $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}, \forall x \in \mathbb{R}$. On note par $\Phi(x)$ sa fonction de répartition.

1. Calculer $\mathbb{E}(X+1)$ et $\mathbb{V}(-2X)$
2. On pose $Y = e^{|X|}$.
   (a) Déterminer la fonction de répartition de Y, notée $F_Y(x)$, en fonction de $\Phi(.)$.
   (b) Déterminer la densité de Y, notée $f_Y(x)$.
3. Soit Z la v.a réelle de densité

$$f_Z(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}\varphi(\ln(x)) & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(a) Déterminer la fonction de répartition de Z, notée $F_Z(x)$, en fonction de $\Phi(.)$

(b) Calculer $\mathbb{E}(Z)$

Exercice 4 *(5 pts)* Soit (X, Y) un couple de v.a. de densité jointe :

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} c\,xy & \text{si } x \geqslant 0,\ y \geqslant 0 \text{ et } x + y \leqslant 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Déterminer la valeur de la constante réelle c.
2. Déterminer une densité de X, puis une densité de Y.
3. Est-ce que X et Y sont indépendantes ?
4. Calculer $\mathbb{P}\,(Y \leqslant X)$.
5. Calculer $\mathbb{E}\left(\dfrac{\ln(X+1)}{XY}\right)$.