Consignes :
- Sont interdits : Documents, calculettes, téléphones, écouteurs, ordinateurs, tablettes.
- Il est interdit de composer avec un crayon.
- Votre feuille double d'examen doit porter, à l'emplacement réservé, vos nom, prénom, et signature.
- Cette zone réservée doit être cachée par collage.
- Vos feuilles intercalaires doivent êtres toutes numérotées.
- Le barème est donné à titre indicatif.
- Toute réponse non justifiée comptera pour zéro.

Exercice 1 *(5 pts)* Soit (X, Y) un couple de v.a. de densité jointe :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } 0 \leq y \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Vérifier qu'il s'agit bien d'une densité.
2. Est-ce que X et Y sont indépendantes ?
3. Déterminer une densité de X.
4. Déterminer une densité de Y.
5. Calculer $\text{Cov}(X, Y)$.

Solution 1

1. Il est clair que $f(x,y) \geq 0 \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, et on a

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy &= \int_0^1 \left(\int_0^x \frac{1}{x}dy\right) dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{x}\,[y]_0^x\, dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{x}\,[x]\, dx \\ &= [x]_0^1 = 1. \end{aligned}$$

Donc f est bien une densité.

2. X et Y ne sont clairement pas indépendantes du fait de la relation d'ordre entre X et Y (les valeurs de l'une dépendent donc des valeurs de l'autre).

3. La densité de X est $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy$, $x \in \mathbb{R}$. On a $X(\Omega) = [0,1]$. Par conséquent, pour tout $x \notin [0,1]$, on a

$$f_X(x) = 0.$$

Pour tout $x \in [0,1]$, on a

$$f_X(x) = \int_0^x \frac{1}{x}dy = 1.$$

La densité de X est donc définie par

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,1], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La densité de Y est $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx$, $y \in \mathbb{R}$. On a $Y(\Omega) = [0,1]$. Donc, pour tout $y \notin [0,1]$, on a

$$f_Y(y) = 0.$$

Pour tout $y \in [0,1]$, on a

$$f_Y(y) = \int_y^1 \frac{1}{x} dx = [\ln x]_y^1 = -\ln y.$$

La densité de Y est donc donnée par :

$$f_Y(y) = \begin{cases} -\ln y & \text{si } y \in [0,1], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

4. En utilisant les résultats de la question 1-, on a

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx = \int_0^1 x \times 1 dx = \int_0^1 x dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2},$$

en faisant une intégration par parties,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y) &= \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y)dy = \int_0^1 y \times (-\ln y)dy = -\int_0^1 y \ln y dy \\
&= -\left(\left[\frac{y^2}{2}\ln y\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{y^2}{2} \times \frac{1}{y} dy\right) \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 y dy = \frac{1}{2}\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(XY) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy f(x,y)dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^x xy\frac{1}{x}dy\right)dx \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^x y dy\right)dx = \int_0^1 \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^x dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\operatorname{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{6} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{24}.$$

Exercice 2 *(5 pts)*

1. On rappelle l'inégalité de Markov : Si Y est une v.a. réelle positive d'espérance $\mathbb{E}(Y) < \infty$, alors, pour tout $\epsilon > 0$, on a : $\mathbb{P}(Y \geqslant \epsilon) \leqslant \frac{\mathbb{E}(Y)}{\epsilon}$. On rappelle aussi que pour toute v.a réelle T, on a $\mathbb{E}(|T|) \leqslant \sqrt{\mathbb{E}(T^2)}$.

   Soit X une v.a. Binomiale de loi $\mathcal{B}(4, \frac{1}{2})$. Montrer que, pour tout $\epsilon > 0$ on a : $\mathbb{P}(|X-2| \geqslant \epsilon) \leqslant \frac{1}{\epsilon}$.

2. On rappelle l'inégalité de Bienaymé-Chebychev : Si X est une v.a. réelle d'espérance $\mathbb{E}(X)$ et de variance $\mathbb{V}(X) < \infty$, alors, pour tout $\epsilon > 0$, on a : $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geqslant \epsilon) \leqslant \frac{\mathbb{V}(X)}{\epsilon^2}$.
   Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a. i.i.d. de loi $\mathcal{B}(4, \frac{1}{2})$. On pose $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.
   Montrer que la suite $(\overline{X}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers 2.

3. Soit la v.a $\overline{Z}_n = \sqrt{n}(\overline{X}_n - 2)$. Que elle est la loi limite de la suite de v.a. $(\overline{Z}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$? donner la (les) valeur(s) de son (ses) paramètre(s).

Solution 2

1. Inégalité de Markov : Si Y est une v.a. réelle positive d'espérance $\mathbb{E}(Y) < \infty$, alors, pour tout $\epsilon > 0$, on a : $\mathbb{P}\big(Y \geqslant \epsilon\big) \leqslant \frac{\mathbb{E}(Y)}{\epsilon}$. X une v.a. de loi Binomiale $\mathcal{B}(4, \frac{1}{2})$ donc $\mathbb{E}(X) = 4 \times \frac{1}{2} = 2$. En posant la v.a. $Y = X - \mathbb{E}(X)$, selon l'inégalité de Markov, pour tout $\epsilon > 0$, on a : $\mathbb{P}\big(|Y| \geqslant \epsilon\big) \leqslant \frac{\mathbb{E}(|Y|)}{\epsilon}$. (la valeur absolue de Y étant une v.a réelle positive).
   De plus, on sait que $\mathbb{E}(|Y|) \leqslant \sqrt{\mathbb{E}(Y^2)}$ donc $\mathbb{E}(|Y|) \leqslant \sqrt{\mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}[X])^2\right)} = \sqrt{\mathbb{V}(X)} = \sqrt{4 \times \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2})} = 1$. Donc au final, pour tout $\epsilon > 0$, on a : $\mathbb{P}\left(|X - 2| \geqslant \epsilon\right) \leqslant \frac{1}{\epsilon}$.
2. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r. i.i.d. admettant un moment d'ordre 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose
$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$
   Alors $(\overline{X}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers $\mathbb{E}(X_1)$.
   Preuve. On a, par linéarité et distribution identique, $\mathbb{E}(\overline{X}_n) = \mathbb{E}(X_1)$ et, par indépendance et distribution identique,
$$\mathbb{V}(\overline{X}_n) = \frac{1}{n^2}\mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{V}(X_i) = \frac{1}{n}\mathbb{V}(X_1).$$
   En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on obtient
$$\mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mathbb{E}(X_1)\right| \geqslant \epsilon\right) \leqslant \frac{\mathbb{V}\left(\overline{X}_n\right)}{\epsilon^2} = \frac{\mathbb{V}(X_1)}{n\epsilon^2}.$$
   D'où
$$0 \leqslant \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mathbb{E}(X_1)\right| \geqslant \epsilon\right) \leqslant \frac{\mathbb{V}(X_1)}{\epsilon^2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0,$$
   soit
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mathbb{E}(X_1)\right| \geqslant \epsilon\right) = 0.$$
   Cela traduit la convergence en probabilité de $(\overline{X}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers $\mathbb{E}(X_1)$. Et on a $\mathbb{E}(X_1) = 4 \times \frac{1}{2} = 2$
3. d'après le TCL, la suite de v.a. $(\overline{Z}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tel que $Z_n = \frac{\overline{X}_n - \mathbb{E}(\overline{X}_n)}{\sqrt{\mathbb{V}(\overline{X}_n)}} = \frac{\overline{X}_n - \mathbb{E}(X_1)}{\sqrt{\frac{1}{n}\mathbb{V}(X_1)}} = \frac{\overline{X}_n - 2}{\sqrt{\frac{1}{n}\times 1}} = \sqrt{n}(\overline{X}_n - 2)$ converge vers une v.a de loi normale centrée réduite.

Exercice 3 *(5 pts)* Soient X_1 et X_2 deux v.a Gaussiennes où $X_1 \sim \mathcal{N}(0,1)$, $X_2 \sim \mathcal{N}(1,1)$ et $\rho = \frac{1}{\sqrt{2}}$, ρ étant le coefficient de corrélation linéaire. Soit $\boldsymbol{Y} = (Y_1, Y_2)^\top$ le vecteur aléatoire tel que
$$\boldsymbol{Y} = \mathbf{A}\boldsymbol{X} + \mathbf{b},$$
où $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2)^\top$ et $\mathbf{b} = (1,2)^\top$.

1. Déterminer $\mathbb{E}(\boldsymbol{X})$.
2. Déterminer $\mathrm{cov}(\boldsymbol{X})$.
3. Déterminer $\mathbb{E}(\boldsymbol{Y})$.
4. Déterminer $\mathrm{cov}(\boldsymbol{Y})$.
5. En déduire la loi de $\boldsymbol{Y}$.

Solution 3

1. Par définition de $\boldsymbol{X}$ on a $\mathbb{E}(\boldsymbol{X}) = (\mathbb{E}(X_1), \mathbb{E}(X_2))^\top = (0,1)^\top$.

2. La matrice de covariance de $\boldsymbol{X}$ est donnée par $\begin{pmatrix} \mathrm{Var}(X_1) & \mathrm{cov}(X_1, X_2) \\ \mathrm{cov}(X_1, X_2) & \mathrm{Var}(X_2) \end{pmatrix}$. D'après les lois de X_1 et X_2 on a $\mathrm{Var}(X_1) = \mathrm{Var}(X_1) = 1$. Et comme $\rho = \frac{\mathrm{cov}(X_1,X_2)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X_1)\,\mathrm{Var}(X_2)}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, on a donc $\mathrm{cov}(X_1, X_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

   Au final, on a $\mathrm{cov}(\boldsymbol{X}) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \end{pmatrix}$.

3. Par linéarité de l'espérance on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\boldsymbol{Y}) &= \mathbf{A}\mathbb{E}(\boldsymbol{X}) + \mathbf{b} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

4. On a

$$\begin{aligned} \mathrm{cov}(\boldsymbol{Y}) &= \mathbf{A}\,\mathrm{cov}(\boldsymbol{X})\mathbf{A}^\top \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

5. Comme $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2)^\top$ est un vecteur gaussien et $\boldsymbol{Y}$ est de la forme $\boldsymbol{Y} = \mathbf{A}\boldsymbol{X} + \mathbf{b}$, alors $\boldsymbol{Y}$ est aussi un vecteur gaussien. Son espérance et sa matrice de covariance sont celles calculées dans les questions 3- et 4-.

Exercice 4 *(5 pts).* Soit X une v.a. Gaussienne de densité :

$$f(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\,\pi}}\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \forall x \in \mathbb{R}$$

avec $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$. On dispose d'un n-échantillon $(X_1, \cdots, X_n)$ i.i.d selon la loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Soit μ le paramètre inconnu à estimer (on suppose que la variance σ^2 est connue).

1. Calculer la borne inférieure de Cramér-Rao pour un estimateur sans biais de l'espérance μ.
2. Soit $\widehat{\mu}$ l'estimateur du maximum de vraisemblance de μ
   (a) Définir et calculer $\widehat{\mu}$.
   (b) Montrer qu'il est efficace.
   (c) Montrer qu'il est convergent.
   (d) Quelle est sa loi ?

Solution 4

1. Soit B la borne à calculer. Celle-ci dans ce cas est définie par

$$B = -\frac{1}{\mathbb{E}\left[\left(\frac{\partial^2 \ln L(\mu)}{\partial^2 \mu}\right)\right]}$$

(on peut utiliser dans ce cas i.i.d aussi la forme $B = \frac{1}{n\mathbb{E}\left[\left(\frac{\partial \ln f(x_i;\mu,\sigma^2)}{\partial\mu}\right)^2\right]}$ ou encore $B = -\frac{1}{n\mathbb{E}\left[\left(\frac{\partial^2 \ln f(x_i;\mu,\sigma^2)}{\partial^2\mu}\right)\right]}$), où $\ln L(\mu)$ est la log-vraisemblance de μ pour le n-échantillon $(X_1, \cdots, X_n)$, qui s'écrit :

$$\begin{aligned}
\ln L(\mu) &= \ln f(x_1, \ldots, x_n; \mu) = \log \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\,\pi}}\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)^2} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \log \frac{1}{\sigma\sqrt{2\,\pi}} - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\,. \qquad (1)
\end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \ln L(\mu)}{\partial \mu} &= \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu) \qquad (2) \\
\frac{\partial^2 \ln f(x;\mu)}{\partial^2 \mu} &= -\frac{n}{\sigma^2}. \qquad (3)
\end{aligned}$$

Par conséquent, la borne inférieure de Cramer-Rao est donnée par $B = \frac{\sigma^2}{n}$.

(a) L'EMV de μ est défini par

$$\widehat{\mu} = \arg\max_{\mu\in\mathbb{R}} \ln L(\mu),$$

qui correspond au zéro de la fonction de log-vraisemble en μ. D'après (1) et (2), les zéros de la fonction $\ln L(\mu)$ sont définis par

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu) = \sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu = 0$$

ce qui correspond à

$$\widehat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i,$$

soit la moyenne empirique !

(b) on a $\mathbb{E}[\widehat{\mu}] = \mathbb{E}[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i] = \mu$. L'estimateur $\widehat{\mu}$ est donc sans biais. Sa variance est $\mathrm{Var}(\widehat{\mu}) = \mathrm{Var}(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n \mathrm{Var}(X_i) = \frac{1}{n^2} n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$. Il est donc à variance minimale. Par conséquent, $\widehat{\mu}$ est un estimateur efficace pour μ.

(c) $\widehat{\mu}$ est sans biais ; de plus, on a $\lim_{n\to\infty}\mathrm{Var}(\widehat{\mu}) = \lim_{n\to\infty}\frac{\sigma^2}{n} = 0$. Il est donc convergent.

(d) $\widehat{\mu} \sim \mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ ($\widehat{\mu}$ ici est une somme pondérée de variables Gaussiennes, il est donc gaussien).