**Université de Caen** | **Partiel du 22 novembre 2018. Durée 2h** | **Probabilités et Statistique 3**
**UFR des Sciences** | Par Faïcel Chamroukhi | **L3 Maths-MIASHS**

**Consignes** :
- Sont interdits : Documents, calculettes, téléphones, écouteurs, ordinateurs, tablettes.
- Il est interdit de composer avec un crayon.
- Votre feuille double d'examen doit porter, à l'emplacement réservé, vos nom, prénom, et signature.
- Cette zone réservée doit être cachée par collage.
- Vos feuilles intercalaires doivent êtres toutes numérotées.
- Le barème est donné à titre indicatif.
- Toute réponse non justifiée comptera pour zéro.

**Exercice 1** *(5 pts)* Soit $(X, Y)$ un couple de v.a. de densité jointe :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } 0 \leq y \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Vérifier qu'il s'agit bien d'une densité.
2. Est-ce que $X$ et $Y$ sont indépendantes ?
3. Déterminer une densité de $X$.
4. Déterminer une densité de $Y$.
5. Calculer $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

**Exercice 2** *(5 pts)*

1. On rappelle l'inégalité de Markov : Si $Y$ est une v.a. réelle positive d'espérance $\mathbb{E}(Y) < \infty$, alors, pour tout $\epsilon > 0$, on a : $\mathbb{P}\big(Y \geqslant \epsilon\big) \leqslant \frac{\mathbb{E}(Y)}{\epsilon}$. On rappelle aussi que pour toute v.a réelle $T$, on a $\mathbb{E}(|T|) \leqslant \sqrt{\mathbb{E}(T^2)}$.

   Soit $X$ une v.a. Binomiale de loi $\mathcal{B}(4, \frac{1}{2})$. Montrer que, pour tout $\epsilon > 0$ on a : $\mathbb{P}\left(|X - 2| \geqslant \epsilon\right) \leqslant \frac{1}{\epsilon}$.
2. On rappelle l'inégalité de Bienaymé-Chebychev : Si $X$ est une v.a. réelle d'espérance $\mathbb{E}(X)$ et de variance $\mathbb{V}(X) < \infty$, alors, pour tout $\epsilon > 0$, on a : $\mathbb{P}\big(\,|X - \mathbb{E}[X]| \geqslant \epsilon\big) \leqslant \frac{\mathbb{V}(X)}{\epsilon^2}$.
   Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a. i.i.d. de loi $\mathcal{B}(4, \frac{1}{2})$. On pose $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$.
   Montrer que la suite $(\overline{X}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers 2.
3. Soit la v.a $\overline{Z}_n = \sqrt{n}(\overline{X}_n - 2)$. Que elle est la loi limite de la suite de v.a. $(\overline{Z}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ? donner la (les) valeur(s) de son (ses) paramètre(s).

**Exercice 3** *(5 pts)* Soient $X_1$ et $X_2$ deux v.a Gaussiennes où $X_1 \sim \mathcal{N}(0, 1)$, $X_2 \sim \mathcal{N}(1, 1)$ et $\rho = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\rho$ étant le coefficient de corrélation linéaire entre $X_1$ et $X_2$. Soit $\boldsymbol{Y} = (Y_1, Y_2)^\top$ le vecteur aléatoire tel que

$$\boldsymbol{Y} = \mathbf{A}\boldsymbol{X} + \mathbf{b},$$

où $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2)^\top$ et $\mathbf{b} = (1, 2)^\top$.

1. Déterminer $\mathbb{E}(\boldsymbol{X})$.
2. Déterminer $\mathrm{cov}(\boldsymbol{X})$.
3. Déterminer $\mathbb{E}(\boldsymbol{Y})$.
4. Déterminer $\mathrm{cov}(\boldsymbol{Y})$.
5. En déduire la loi de $\boldsymbol{Y}$.

**Exercice 4** *(5 pts).* Soit $X$ une v.a. Gaussienne de densité :

$$f(x;\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\,\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \forall x \in \mathbb{R}$$

avec $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$. On dispose d'un $n$-échantillon $(X_1, \cdots, X_n)$ i.i.d selon la loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Soit $\mu$ le paramètre inconnu à estimer (on suppose que la variance $\sigma^2$ est connue).

1. Calculer la borne inférieure de Cramér-Rao pour un estimateur sans biais de l'espérance $\mu$.
2. Soit $\widehat{\mu}$ l'estimateur du maximum de vraisemblance de $\mu$
   (a) Définir et calculer $\widehat{\mu}$.
   (b) Montrer qu'il est efficace.
   (c) Montrer qu'il est convergent.
   (d) Quelle est sa loi ?