Université de Caen		**Probabilités et statistiques 3**
UFR des Sciences	Examen TP du 24 novembre 2017. Durée 2h	par F. Chamroukhi
L3 Miashs-Maths	Tous les documents sont interdits.	2017/2018

Consignes : Vos réponses aux questions se feront dans un seul fichier R. Vous nommerez votre fichier `NOM_Prenom.R` où `NOM` et `Prenom` sont vos nom et prénom sans accent et sans espace. La première ligne du fichier contiendra vos nom et prénom sous forme d'un commentaire : `# Nom Prénom`. Le dépôt de votre fichier se fera exclusivement sur ecampus le 24/11/2017 avant 16h00, heure stricte.

Barème : Le barème est donné à titre indicatif. Les exercices pour lesquels les codes ne s'exécutent pas, seront notés sur la moitié des points du barème.

Sujet :

Exécuter les commandes suivantes :

```
rm(list = ls())
file.create("True.Rhistory")
loadhistory("True.Rhistory")
```

Exercice 1 (5pts) :

1. Ecrire une fonction `mixB` qui permet de calculer la loi suivante :

$$\mathbb{P}(X = k) = a\,\mathcal{B}(k; n, p_1) + (1 - a)\mathcal{B}(k; n, p_2); \quad \forall k \in \{0, \dots, n\}$$

   où $n \in \mathbb{N}^\star$ et $(a, p_1, p_2) \in]0, 1[^3$ sont les paramètres de cette loi.
2. On se fixe $a = 0.6$, $n = 15$, $p_1 = 0.7$ et $p_2 = 0.5$.
   (a) Vérifier qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité
   (b) Calculer $\mathbb{P}(X = 8)$ et $\mathbb{P}(X \leq 10)$
3. Ecrire une fonction `mixN` qui permet de calculer la densité suivante :

$$f(x) = a\,\mathcal{N}(x; \mu_1, \sigma_1) + (1 - a)\mathcal{N}(x; \mu_2, \sigma_2); \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

   où $a \in]0, 1[$, $(\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2$ et $(\sigma_1, \sigma_2) \in {\mathbb{R}_+^\star}^2$ sont les paramètres de cette densité.
4. On se fixe $a = 0.6$, $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 3$, $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = 1.5$.
   (a) Vérifier numériquement que $\int_{-10}^{10} f(x)\mathrm{d}x \simeq 1$
   (b) Calculer $f(1.34)$

Exercice 2 (5 pts) :

On rappelle l'inégalité de Bienaymé-Chebychev : Soit X une variable aléatoire (v.a) d'espérance $\mathbb{E}(X)$. Alors, pour tout $\epsilon > 0$, on a : $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \epsilon) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{\epsilon^2}$. L'objectif de cet exercice est d'illustrer cette inégalité avec un exemple. Soit X une v.a suivant la loi de Poisson $\mathcal{P}(1)$.

1. Donner, sans démonstration, $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$
2. Simuler un échantillon de taille 500 de X.
3. Une approximation de $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \epsilon)$ est donnée par la proportion R_ϵ de valeurs simulées vérifiant $|X - \mathbb{E}(X)| \geq \epsilon$. Évaluer celle-ci pour $\epsilon = 2$, puis comparer avec $\frac{\mathbb{V}(X)}{\epsilon^2}$.
4. Ecrire des instructions R permettant d'illustrer graphiquement l'inégalité de Bienaymé-Chebychev pour des valeurs de ϵ allant de 1 à 20 par pas de 1.

Exercice 3 (5 pts) :

On considère les deux densités $f_1(x) = \mathcal{N}(x; 6, 1.5)$ et $f_2(x) = \mathcal{N}(x; 2, 1)$. Pour simuler un échantillon de taille n, nous considérons la procédure suivante : Pour chaque point, on observe tout d'abord l'issue d'une expérience de Bernoulli de paramètre 0.7. En cas de succès, on simule le point à partir de la densité f_1, en cas d'échec, on le simule à partir de f_2

1. Ecrire les instructions R permettant de simuler un échantillon de taille 2000
2. Représenter ces données par un histogramme de fréquences
3. Tracer, sur le graphique précédent, la courbe de la densité $f(x) = 0.7\,f_1(x) + 0.3\,f_2(x)$.
4. Commenter

Exercice 4 (5 pts) :

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ une suite de n v.a. i.i.d de même loi $\mathcal{B}(10, 0.2)$.

1. Ecrire des instructions R permettant de calculer $\overline{X}_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$ pour $n = 1, 2...., 5000$.
2. Afficher le graphique représentant $\overline{X}_n$ pour les différentes valeurs de n (vous utiliserez un trait continu)
3. Déterminer $\mathbb{E}[X_1]$ et afficher, en rouge et sur le graphique précédent, la droite d'équation $y = \mathbb{E}[X_1]$.
4. Commenter
5. De quel résultat s'agit-il ?