Université de Caen | Probabilités et Statistique
Licence 3 MIASHS-Maths | Année 2017-2018

TD

Exercice 1. Trois personnes arrivent dans un compartiment de train comprenant 5 places. De combien de façons peuvent-elles se disposer ?

Exercice 2. On mélange les figures (rois, dames, valets) d'un jeu de cartes et on tire au hasard trois cartes du paquet ainsi formé.
a) Quel est le nombre de mains différentes que l'on peut obtenir ?
b) Combien y a-t-il de mains comportant au moins un coeur ?

Exercice 3. Un dé truqué est un peu plus lourd vers la face 2 que vers son opposée, la face 5. On observe expérimentalement que cette face 5 est 3 fois plus fréquente que la face 2, et 2 fois plus fréquente que chacune des faces " latérales" qui, elles, apparaissent avec la même fréquence. Quel espace probabilisé modélise cette situation ? Quelle est la probabilité d'avoir 5 ? d'avoir un chiffre pair ?

Exercice 4. Le lendemain de la sortie d'un film, 3 journaux a, b et c publient les critiques nécessairement favorables ou défavorables. Soient les événements :

A = "la critique a est favorable"
B = "la critique b est favorable"
C = "la critique c est favorable"

Ecrire à l'aide de A, B et C les événements suivants :

a) E1 = "seule la critique a est favorable"
b) E2 = "les critiques a et b sont favorables, mais pas celle de c"
c) E3 = "les trois critiques sont favorables"
d) E4 = "une critique au moins est favorable"
e) E5 = "deux critiques au moins sont favorables"
f) E6 = "une et une seule critique est favorable"
g) E7 = "deux critiques, et deux seulement, sont favorables"
h) E8 = "pas plus d'une critique n'est favorable"
i) E9 = "aucune critique n'est favorable"

Exercice 5. Une expérience consiste à lancer deux pièces de monnaie que l'on peut distinguer. Quel est l'univers Ω de cette expérience ? Quelles sont les événements élémentaires ?
On définit les événements A : "on obtient au moins une fois Face" et B : "le deuxième lancer donne Pile". Donner : A, B, $A \cup B$, $A \cap B$, $\bar{A}$, $A \setminus B \triangleq A \cap \bar{B}$, puis la probabilité de chacun de ces événements.

⋆

Exercice 6. On tire au hasard une carte dans un jeu de 52 cartes. Calculer la probabilité de tirer :

a) un as
b) le valet de coeur
c) le 3 de trèfle ou le 6 de carreau
d) un coeur
e) n'importe quoi sauf un coeur
f) un 10 ou un pique
g) ni un 4 ni un trèfle

Exercice 7. Quelle est la probabilité de tirer (au moins) un 4 si on lance deux dés ?

Exercice 8.

a) Montrer que si $A \subseteq B$, alors $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$ et $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$

b) En déduire que $\forall A, B$ alors $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

Exercice 9. Soit $Q(A) = \mathbb{P}(A|B)$ où $\mathbb{P}(B) \neq 0$ et $\mathbb{P}$ une probabilité sur l'univers Ω.
Montrer que Q est une probabilité sur Ω.

Exercice 10. Une enquête établie dans la population des automobilistes a révélé que 60% des personnes interrogées ne connaissent pas parfaitement le code de la route (événement I) et que parmi celles-ci, 25% ont déjà provoqué un accident. 30% des personnes interrogées connaissent le code de la route mais ne l'appliquent pas, notamment sur les limitations de vitesses (événement V). Parmi celles-ci 40% ont déjà provoqué un accident. Enfin, le reste des personnes connait et respecte le code (événement C) mais parmi elles, 10% ont eu un accident. Un automobiliste cause un accident (événement A), quelle est la probabilité pour qu'il fasse partie de la première catégorie ? de la seconde ? de la dernière ?

Exercice 11. On tire une carte puis une seconde dans un jeu de 52 cartes. Quelle est la probabilité de tirer deux as :

a) si la première carte est remise dans le paquet

b) sans remise

Exercice 12. On tire au hasard une carte dans un jeu de 52 cartes. Calculer la probabilité de tirer :

a) un as

b) un as sachant que l'on a tiré un trèfle

c) un as sachant que l'on a tiré une carte noire

d) un as de trèfle

e) un as de trèfle sachant que l'on a tiré un trèfle

$\star$

Exercice 13. On tire une carte puis une seconde dans un jeu de N cartes contenant K as.

a) Quelle est la probabilité de tirer un as au premier tirage ?

b) Quelle est la probabilité de tirer un as au second tirage si la première carte tirée est un as et n'est pas remise dans le paquet ?

c) Quelle est la probabilité de tirer un as au second tirage si la première carte tirée n'est pas remise dans le paquet ?

Exercice 14. Le quart d'une population a été vaccinée contre la lèpre. Au cours d'une épidémie, on constate que parmi les malades, il y a un vacciné pour quatre non-vaccinés.

a) le vaccin a-t-il une efficacité quelconque ?

b) on sait en outre qu'il y a un malade sur douze parmi les vaccinés. Quelle est la probabilité de tomber malade pour une personne non-vaccinée ?

Exercice 15. Soient deux urnes I et II contenant respectivement :

I : 3 boules rouges et 2 boules blanches

II : 2 boules rouges et 8 boules blanches

On lance une pièce de monnaie : si l'on obtient "face", on tire dans I, sinon on tire dans II.

a) calculer la probabilité de tirer une boule rouge

b) le lanceur cache le résultat de la pièce. Si une boule rouge est tirée, quelle est la probabilité pour que I ait été choisie ?

Exercice 16. Un évènement A se produit avec une probabilité faible ($\mathbb{P}(A) = 0.01$). Quelle est la probabilité qu'il se produise au moins une fois dans une succession de 100 expériences (indépendantes) ?

Exercice 17. Soient deux dés truqués pour lesquels $\mathbb{P}(6) = \frac{2}{6}, \mathbb{P}(1) = 0$ et $\mathbb{P}(k) = \frac{1}{6} \forall k \in \{2, 3, 4, 5\}$ avec $\mathbb{P}(k)$ étant la probabilité d'avoir la face numéro k. Soit X la v.a. représentant la somme des deux dés.

a) calculer les moments centrés d'ordre 1, 2 et 3

b) dessiner la loi de probabilité
c) comparer les résultats à ceux obtenus si les dés sont normaux

⋆

Exercice 18. Soit X une variable aléatoire discrète, $F_X(x)$ sa fonction de répartition et $\mathbb{P}(X = x)$ sa loi probabilité.

1. En déduire l'expression de $\mathbb{P}(X > x)$ en fonction de $F_X(x)$
2. Montrer que pour deux réels a et b tel que $a < b$ on a $\mathbb{P}(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$

Solution.

1. on obtient $\mathbb{P}(X > x) = 1 - F_X(x)$ par passage au complémentaire : soit $A =]-\infty; x]$, on a $\mathbb{P}(X > x) = \mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(X \leq x) = 1 - F_X(x)$
2. on a $\mathbb{P}(X \leq b) = \mathbb{P}(X \leq a) + \mathbb{P}(a < X \leq b)$ donc $\mathbb{P}(a < X \leq b) = \mathbb{P}(X \leq b) - \mathbb{P}(X \leq a) = F_X(b) - F_X(a)$. En effet, comme $a < b$, si on prend $A =]-\infty; a]$ et $B =]-\infty; b]$ on a $A \subset B$ et don $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus A)$.
3. On a $x_1 \leq x_2 \leq x_3$.., Si on prend

   $$A_{11} =]-\infty; x_1[, A_{12} =]-\infty; x_1], A_{21} =]-\infty; x_2[, A_{22} =]-\infty; x_2], ..., A_{n1} =]-\infty; x[, A_{n2} =]-\infty; x]$$

   on a

   $$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \leq x) &= \big(\mathbb{P}(A_{12}) - \mathbb{P}(A_{12} \setminus A_{11})\big) + \big(\mathbb{P}(A_{22}) - \mathbb{P}(A_{22} \setminus A_{21})\big) + \big(\mathbb{P}(A_{n2})\big) - \mathbb{P}(A_{n2} \setminus A_{n1})\big) \\ &= \mathbb{P}(x_1) + \mathbb{P}(x_2) + ... + \mathbb{P}(x_n) \\ &= \sum_{x_i \leq x} \mathbb{P}(X = x_i) \end{aligned}$$

Exercice 19. Soit une variable aléatoire X prenant les valeurs $-1, 1, 2$ et 3 avec les probabilités respectives $\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}$ et $\frac{1}{2}$

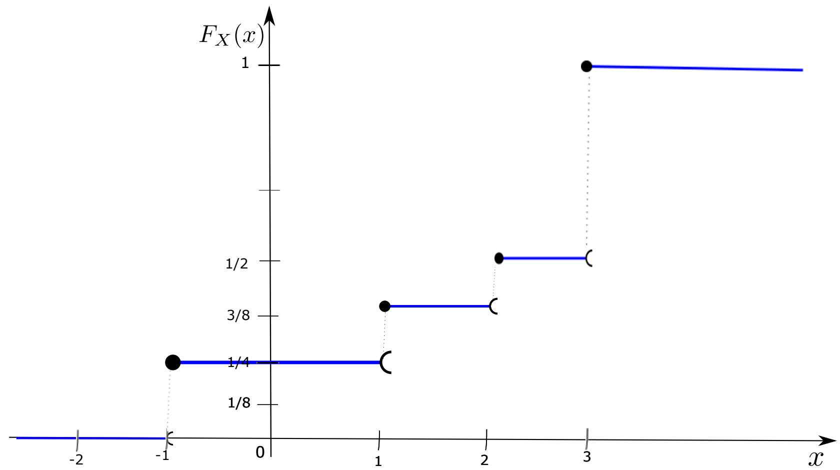
1. Déterminer et représenter graphiquement la fonction de répartition $F_X(x)$ de X
2. Calculer les probabilités suivantes :
   (a) $\mathbb{P}(X > 2)$
   (b) $\mathbb{P}(1 < X \leq 3)$
3. Calculez l'espérance de X
4. Calculez la variance de X

Solution.

1. La fonction de répartition $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$ est donnée par :

   $$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in]-\infty; -1[\\ \frac{1}{4} & \text{si} \quad x \in [-1; 1[\\ \frac{3}{8} & \text{si} \quad x \in [1; 2[\\ \frac{1}{2} & \text{si} \quad x \in [2; 3[\\ 1 & \text{si} \quad x \in [3; +\infty] \end{cases}$$

   et son graphe est donné par :
2. On rappelle que
   (a) $\mathbb{P}(X > x) \ = 1 - F_X(x)$
   (b) $\mathbb{P}(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$



donc :
$\mathbb{P}(X > 2) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 2) = 1 - F_X(2) = 1 - 1/2 = 1/2$
$\mathbb{P}(1 < X \leq 3) = F_X(3) - F_X(1) = 1 - 3/8 = 5/8$

3. Pour le calcul de l'espérance de X, on applique la définition de l'espérance :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \sum_{x \in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X = x) \text{ avec } X(\Omega) = \{-1, 1, 2, 3\} \\ &= -1 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{8} + 2 \times \frac{1}{8} + 3 \times \frac{1}{2} = 13/8 (= 1.625) \end{aligned}$$

4. Pour le calcul de la variance de X, on applique également la définition de la variance (on utilisera cette deuxième forme de la définition de la variance ($\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$) qui est souvent plus pratique que la première ($\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}[(X - E[X])^2]$). Il reste donc à calculer $\mathbb{E}[X^2]$. On utilise également la définition de l'espérance pour la calculer :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X^2] &= \sum_{x \in X(\Omega)} x^2\mathbb{P}(X = x) \text{ avec } X(\Omega) = X(\Omega) = \{-1, 1, 2, 3\} \\ &= (-1)^2 \times \frac{1}{4} + 1^2 \times \frac{1}{8} + 2^2 \times \frac{1}{8} + 3^2 \times \frac{1}{2} = 43/8 \end{aligned}$$

Donc $\mathrm{Var}(X) = 43/8 - (13/8)^2 = (344 - 169)/64 = 175/64 (\simeq 2.73)$.

Exercice 20.

1. Montrer que pour deux constantes réelles a et b on a $\mathrm{Var}(aX + b) = a^2 \mathrm{Var}(X)$
2. Montrer que $\mathrm{Var}(X + Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2\,\mathrm{Cov}(X, Y)$

Solution.

1.

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(aX + b) &= \mathbb{E}[(aX + b)^2] - (\mathbb{E}[aX + b])^2 \\ &= \mathbb{E}[a^2X^2 + b^2 + 2abX] - (a\mathbb{E}[X] + b)^2 \\ &= a^2\mathbb{E}[X^2] + b^2 + 2ab\mathbb{E}[X] - a^2(\mathbb{E}[X])^2 - b^2 - 2ab\mathbb{E}[X] \\ &= a^2\mathbb{E}[X^2] - a^2(\mathbb{E}[X])^2 \\ &= a^2(\underbrace{\mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2}_{\mathrm{Var}(X)}) \\ &= a^2 \mathrm{Var}(X) \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X+Y) &= \mathbb{E}[(X+Y)^2] - (\mathbb{E}[X+Y])^2 \\
&= \mathbb{E}[X^2+Y^2+2XY] - (\mathbb{E}[X]+E[Y])^2 \\
&= \mathbb{E}[X^2] + \mathbb{E}[Y^2] + 2\mathbb{E}[XY] - (\mathbb{E}[X])^2 - (E[Y])^2 - 2\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] \\
&= \underbrace{\mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2}_{\mathrm{Var}(X)} + \underbrace{\mathbb{E}[Y^2] - (E[Y])^2}_{\mathrm{Var}(Y)} + 2\big(\underbrace{\mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]}_{\mathrm{Cov}(X,Y)}\big) \\
&= \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2\,\mathrm{Cov}(X,Y)
\end{aligned}$$

Exercice 21. Considérons l'expérience aléatoire suivante. On lance trois fois de suite une pièce de monnaie (non truquée). Pour chaque lancé, on gagne 1 euro si on obtient pile et 0 euro sinon (face). Soit X la variable aléatoire désignant le gain total obtenu par le joueur.

1. Déterminez l'univers de cette expérience aléatoire
2. Déterminez la loi de probabilité de X
3. Calculez l'espérance de X
4. Calculez la variance de X

Solution.

1. $\Omega = \{fff, ffp, fpf, pff, fpp, pfp, ppf, ppp\}$ il contient 8 évènements élémentaires
2. Afin de de déterminer la loi de probabilité de X, nous allons tout d'abord déterminer l'ensemble des valeurs x_i prises par X pour ensuite donner les probabilités $\mathbb{P}(X = x_i)$ pour chacune des valeurs de x_i (donc la loi de probabilité de X). On a, d'après l'univers Ω, les valeurs du gain possibles $X(w)$ pour chaque évènement élémentaire ω de Ω sont donnés par le tableau suivant L'ensemble des réalisations de X est donc $\{0, 1, 2, 3\}$ et on a les correspondances suivantes entres

ω_i	fff	ffp	fpf	pff	fpp	pfp	ppf	ppp
$X(\omega_i)$	0	1	1	1	2	2	2	3

les évènement $X = x_i, i = 1, ..., 3$ et les évènements élémentaires $w_i, i = 1, ..., 8$:

$$\begin{aligned}
[X = 0] &= \omega_1 = \{fff\} \\
(X = 1] &= \{\omega_2, \omega_3, \omega_4\} = \{ffp, fpf, pff\} \\
(X = 2] &= \{\omega_5, \omega_6, \omega_7\} = \{fpp, pfp, ppf\} \\
(X = 3] &= \{\omega_8\} = \{ppp\}
\end{aligned}$$

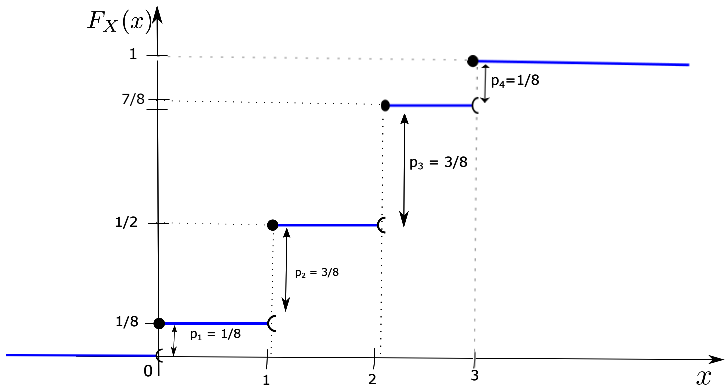
La probabilité de chacun des évènements ω_i vaut $\frac{1}{8}$. On en déduit alors la loi de probabilité de X

x_i	0	1	2	3
$p_i = \mathbb{P}(X = x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

3. La fonction de répartition $F_X(x)$ est donnée par :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in]-\infty; 0[\\ \frac{1}{8} & \text{si} \quad x \in [0; 1[\\ \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{1}{2} & \text{si} \quad x \in [1; 2[\\ \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8} & \text{si} \quad x \in [2; 3[\\ 1 & \text{si} \quad x \in [3; +\infty] \end{cases}$$

et son graphe est donné par :



4. Pour le calcul de l'espérance de X, on applique la définition de l'espérance :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \sum_{x \in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X = x) \text{ avec } X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\} \\ &= 0 \times \frac{1}{8} + 1 \times \frac{3}{8} + 2 \times \frac{3}{8} + 3 \times \frac{1}{8} = 12/8 = 3/2\end{aligned}$$

(on peut dire que le joueur gagne en moyenne 1 euro cinquante)

5. Pour le calcul de la variance de X, on applique également la définition de la variance (on utilisera cette deuxième forme de la définition de la variance ($\text{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$) qui est souvent plus pratique que la première ($\text{Var}[X] = \mathbb{E}[(X - E[X])^2]$). Il reste donc à calculer $\mathbb{E}[X^2]$. On utilise également la définition de l'espérance pour la calculer :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X^2] &= \sum_{x \in X(\Omega)} x^2\mathbb{P}(X = x) \text{ avec } X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\} \\ &= 0^2 \times \frac{1}{8} + 1^2 \times \frac{3}{8} + 2^2 \times \frac{3}{8} + 3^2 \times \frac{1}{8} = 24/8 = 3\end{aligned}$$

Donc $\text{Var}(X) = 3 - (3/2)^2 = 3/4$. (on peut dire que le joueur gagne en moyenne 1.5 euro avec un écart de $\sqrt{.75} = 87$ cents autour de cette moyenne)

Exercice 22. On lance un dé (non truqué) à 6 faces et on note par X la valeur du résultat obtenu.

1. Calculez l'espérance de X
2. Calculez l'espérance de X sachant que l'on obtienne que des valeurs inférieures ou égales à quatre.

Solution.

1. Pour le calcul de l'espérance de X, on applique la définition de l'espérance :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \sum_{x \in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X = x) \text{ avec } X(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \\ &= (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) \times \frac{1}{6} = 21/6 = 7/2\end{aligned}$$

2. Soit B l'évènement "X est inférieure ou égale à quatre". L'espérance de X dans le cas où l'on obtient que des valeurs inférieures ou égales à quatre correspond à l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}[X|B]$. Pour la calculer, on applique la définition de l'espérance conditionnelle :

$$\mathbb{E}[X|B] = \sum_{x\in X(\Omega)} x\,\mathbb{P}(X=x|B)$$

Il faut donc calculer la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(X = x|B)$. On applique pour cela le théorème de Bayes sur les deux évènements $\{X = x\}$ et B, à savoir :

$$\mathbb{P}(X=x|B) = \frac{\mathbb{P}(\{X=x\}\cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

On a $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(\{1\}) + \mathbb{P}(\{2\}) + \mathbb{P}(\{3\}) + \mathbb{P}(\{4\}) = 4 \times 1/6 = 2/3$ et

$$\mathbb{P}(\{X=x\}\cap B) \quad = \quad \begin{cases} \frac{1}{6} & \text{si } x \in \{1,2,3,4\} \\ 0 & \text{sinon } (i.e. \text{ si } x \in \{5,6\}) \end{cases}$$

donc d'après le thm de Bayes on trouve

$$\mathbb{P}(\{X=x\}|B) \quad = \quad \begin{cases} \frac{3}{2}\times\frac{1}{6} = \frac{1}{4} & \text{si } x \in \{1,2,3,4\} \\ 0 & \text{sinon } (i.e. \text{ si } x \in \{5,6\}) \end{cases}$$

et on obtient finalement $\mathbb{E}[X|B] = (1+2+3+4)\times\frac{1}{4} + (5+6)\times 0 = .$

Exercice 23. *Inégalité de Bienaymé-Chebychev* Soit X une variable aléatoire discrète et $\mathbb{P}$ sa mesure de probabilité,

1. Montrez que
$$\forall r>0, \forall\varepsilon>0, \qquad \mathbb{P}\big(|X| \geqslant \varepsilon\big) \leqslant \frac{\mathbb{E}(|X|^r)}{\varepsilon^r}.$$
2. En déduire la démonstration de l'inégalité de Bienaymé-Chebychev :
$$\forall\varepsilon>0, \qquad \mathbb{P}\big(|X-\mathbb{E}[X]| \geqslant \varepsilon\big) \leqslant \frac{\mathrm{Var}(X)}{\varepsilon^2}.$$

Solution.

1. On applique la définition de l'espérance en divisant l'ensemble des x en deux sous ensembles : celui pour lequel on $|x| < \epsilon$ et son complémentaire (même idée pour démontrer l'inégalité de Markov vue en cours) :
$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(|X|^r) &= \sum_{x\in X(\Omega)} |x|^r\,\mathbb{P}(X=x_i) \\
&= \underbrace{\sum_{x\in X(\Omega)||x|<\epsilon} x\,\mathbb{P}(X=x)}_{\geqslant 0} + \sum_{x\in X(\Omega)||x|\geqslant\epsilon} |x|^r\,\mathbb{P}(X=x) \\
&\geq \sum_{x\in X(\Omega)||x|\geqslant\epsilon} |x|^r\,\mathbb{P}(X=x) \geq \sum_{x\in X(\Omega)||x|\geqslant\epsilon} \epsilon^r\,\mathbb{P}(X=x) \\
&\geq \epsilon^r \sum_{x\in X(\Omega)||x|\geqslant\epsilon} \mathbb{P}(X=x) = \epsilon^r\mathbb{P}(X\geqslant x)
\end{aligned}$$
2. Il suffit d'appliquer l'inégalité précédente à la variable aléatoire centrée avec $r = 2$

Exercice 24. Une cible est constituée de 4 zones concentriques rapportant 500, 300, 200 et 100 points. On numérote ces zones de 1 à 4 en allant de l'intérieur vers l'extérieur et on donne les probabilités respectives d'atteindre ces zones comme $p_1 = \frac{1}{12}, p_2 = \frac{1}{8}, p_3 = \frac{1}{6}, p_4 = \frac{1}{4}$

a) Quelle est la probabilité de manquer la cible ?

b) En tirant dans la cible, on appelle X le nombre de points obtenus. Quelle est la loi de probabilité de X ? Calculer l'espérance et l'écart-type de X.
c) En tirant deux fois de suite dans la cible (les lancers sont indépendants : le résultat du premier lancer n'influe pas sur le résultat du second), on appelle Y le nombre de points obtenus en sommant les deux résultats. Quelle est la loi de probabilité de Y ? Calculer l'espérance et l'écart-type de Y. Vérifier l'inégalité de Bienaymé-Chebychev en calculant la probabilité de l'événement A : "$|Y - \mathbb{E}(Y)| < 2\mathrm{Var(Y)}''$.

Exercice 25. Six feux tricolores non synchronisés sont placés le long d'une route. Chacun est réglé de la même façon : 45 secondes pour le vert, 5 s pour l'orange et 30 s pour le rouge. Sachant que l'on passe à l'orange, quelle est la loi de probabilité du nombre X de feux qui peuvent être passés sans nécessiter d'arrêt ? Quel est le nombre de feux que l'on peut, en moyenne, espérer passer sans s'arrêter ?

⋆

Exercice 26.
On lance un dé à 6 faces et on note par X la v.a. représentant la valeur du résultat obtenu. Ensuite on relance le dé $X = x$ fois de façon indépendante et on note par Y la v.a. représentant le produit des valeurs obtenues lors des x lancers.

1. Calculer le produit moyen pour quatre lancers. Ce résultat est-il déterministe ou aléatoire ?
2. Calculer le produit moyen quelque soit le nombre de lancers. Ce résultat est-il déterministe ou aléatoire ?

Solution.

1. Il s'agit de calculer la valeur moyenne de Y pour 4 lancers, soit $\mathbb{E}[Y|X = 4]$. On a $X = 4$, donc pour les 4 lancers indépendants
$$\mathbb{E}[Y|X = 4] = \mathbb{E}[X_1 \times \ldots \times X_4] = \mathbb{E}[X_1] \times \ldots \times \mathbb{E}[X_4]$$
où $X_i, i = 1, ..., 4$ est la v.a. représentant le résultat du $i$ème lancer. Comme,
$$\mathbb{E}[X_i] = \mu = \sum_{k=1}^{6} k\ p_k = \sum_{k=1}^{6} k\ \frac{1}{6} = \frac{7}{2}$$
(qui représente la valeur moyenne pour un lancer), on a donc
$$\mathbb{E}[Y|X = 4] = \mu \times \ldots \times \mu = \mu^4$$
qui est bien un réel.
2. On voit bien que lorsqu'on connaît X on s'attend à avoir en moyenne pour Y la valeur μ^X et on a l'espérance conditionnelle de Y sachant X
$$\mathbb{E}[Y|X] = \mu^X$$
qui est une variable aléatoire.

Exercice 27. Soient X et Y deux v.a. discrètes prenant leur valeurs respectivement dans les ensembles $X(\Omega) = \mathcal{X}$ et $Y(\Omega) = \mathcal{Y}$.

1. En utilisant la définition de l'indépendance au sens des lois de probabilités, montrer que si X et Y sont indépendantes, alors on a $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$.
2. En déduire la covariance de X et Y
3. En déduire l'expression de $\mathrm{Var}(X + Y)$

Solution.

1. Attention ! L'espérance de la v.a produit $\mathbb{E}[XY]$ se calcule à partir de la loi jointe du couple (X, Y). Ainsi, on a
$$\mathbb{E}[XY] = \sum_{x\in X(\Omega)} \sum_{y\in Y(\Omega)} xy\mathbb{P}(X = x, Y = y).$$
Ceci vient de la propriété de l'espérance : pour toute fonction ϕ, on a
$$\mathbb{E}[\varphi(X, Y)] = \sum_{x\in X(\Omega)} \sum_{y\in Y(\Omega)} \varphi(x, y)\mathbb{P}(X = x, Y = y)$$
Pour le cas particulier de la v.a produit, on a donc $\varphi(X, Y) = XY$. Donc $\mathbb{E}[XY] = \sum_{x\in X(\Omega)} \sum_{y\in Y(\Omega)} xy\mathbb{P}(X = x, Y = y)$.
Comme les deux v.a sont indépendantes, d'après la définition de l'indépendance on a X et Y sont dites indépendantes si et seulement si leur loi jointe est égale au produit de lois marginales :
$$\mathbb{P}(Y = y, X = x) = \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y).$$
Donc
$$\begin{aligned}\mathbb{E}[XY] &= \sum_{x\in X(\Omega)} \sum_{y\in Y(\Omega)} xy\mathbb{P}(X = x, Y = y)\\ &= \sum_{x\in X(\Omega)} \sum_{y\in Y(\Omega)} xy\mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y)\\ &= \sum_{x\in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x) \sum_{y\in Y(\Omega)} y\mathbb{P}(Y = y)\\ &= \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]\end{aligned}$$
2. Par définition on a $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$. Dans ce cas d'indépendance des deux v.a., on a $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$ donc $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = 0$. Une conséquence de l'indépendance de deux v.a. est donc que leur covariance est nulle. Attention ! la réciproque n'est pas toujours vraie.
3. On a $\mathrm{Var}(X + Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2\,\mathrm{Cov}(X, Y)$ (démo en td précédent), donc, dans ce cas d'indépendance on $\mathrm{Var}(X + Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$.

Exercice 28. Soit un couple de variables aléatoires (X, Y) tel que X prend ses valeurs dans $X(\Omega) = \{-2, 0, 1\}$ et Y dans $Y(\Omega) = \{-1, 1, 2\}$ dont a loi jointe est donnée par le tableau suivant :

$\mathbb{P}(X = x, Y = y)$	$y = -1$	$y = 1$	$y = 2$
$x = -2$	0.2	0.2	α
$x = 0$	0.1	0.1	0.05
$x = 1$	0.2	0	0.1

1. Donner la valeur de α en justifiant votre réponse.
2. Calculer les lois marginales de X et de Y.
3. Montrer que X et Y ne sont pas indépendantes.
4. Calculer la loi conditionnelle de X sachant $Y = 1$. En déduire $\mathbb{E}[X|Y = 1]$.
5. Calculer l'espérance conditionnelle de X sachant $Y \neq 2$.
6. Calculer $\mathbb{E}[XY]$ en déduire $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

Solution.

1. Ce tableau représente la loi de probabilité du coupe (X, Y), donc la somme de toutes les probabilités contenues dans le tableau doit être égale à 1 (propriété de loi de probabilité du couple). La somme vaut $0.95 + \alpha$. Donc $\alpha = 0.05$.
2. La loi marginale de X est obtenue à partir de la loi jointe du couple par

$$\mathbb{P}(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}(X = x, Y = y)$$

   Par exemple pour $x = -2$, on a $\mathbb{P}(X = -2) = \mathbb{P}(X = -2, Y = -1) + \mathbb{P}(X = -2, Y = 1) + \mathbb{P}(X = -2, Y = 2) = 0.2 + 0.2 + 0.05 = 0.45$. Ceci correspond à la somme des colonnes du tableau de la loi jointe pour la ligne correspondant à $x = -2$. Idem pour les autres valeurs de X. La loi de X est donc donné par : On peut vérifier que la somme des probabilités fait 1.

x	-2	0	1
$\mathbb{P}(X = x)$	0.45	0.25	0.3

3. De la même façon, on obtient la loi marginale de Y donnée par

$$\mathbb{P}(Y = y) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x, Y = y)$$

   Ceci correspond à la somme des lignes du tableau de la loi jointe pour chaque ligne correspondant à la valeur de y.

y	-1	1	2
$\mathbb{P}(Y = y)$	0.5	0.3	0.2

   On peut également vérifier que la somme des probabilités fait 1.

   La loi jointe et les lois marginales peuvent donc être données sous forme du tableau suivant

$\mathbb{P}(X = x, Y = y)$	$y = -1$	$y = 1$	$y = 2$	Loi marginale $\mathbb{P}(X = x)$
$x = -2$	0.2	0.2	0.05	0.45
$x = 0$	0.1	0.1	0.05	0.25
$x = 1$	0.2	0	0.1	0.3
Loi marginale $\mathbb{P}(Y = y)$	0.5	0.3	0.2	**1**

4. Les variables X et Y sont indépendantes si et seulement si pour tout $x \in X(\Omega)$ et $y \in Y(\Omega)$, $\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y)$. Pour montrer que les v.a. ne sont pas indépendantes, il suffit donc de trouver un contre exemple. On remarque dans le tableau de la loi jointe que $\mathbb{P}(X = 1, Y = 1) = 0$, alors que d'après les lois marginales de X et Y, $\mathbb{P}(X = 1)\mathbb{P}(Y = 1) = 0.3 \times 0.3 \neq 0$. Les deux variables ne sont donc pas indépendantes.
5. On utilise la définition de la loi conditionnelle (règle de bayes) $\mathbb{P}(X = x|Y = 1) = \frac{\mathbb{P}(X=x,Y=1)}{\mathbb{P}(Y=1)}$. D'après le tableau de la loi jointe du couple qui donne $\mathbb{P}(X = x, Y = 1)$ et le tableau de la loi marginale de Y (qui donne $\mathbb{P}(Y = 1) = 0.3$), la loi conditionnelle $\mathbb{P}(X = x|Y = 1)$ se résume dans le tableau suivant

x	-2	0	1
$\mathbb{P}(X = x\|Y = 1)$	$\frac{0.2}{0.3} = \frac{2}{3}$	$\frac{0.1}{0.3} = \frac{1}{3}$	$\frac{0}{0.3} = 0$

L'espérance conditionnelle est obtenue en appliquant la définition, c'est-à-dire

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X|Y=1] &= \sum_{x\in\mathcal{X}} x\,\mathbb{P}(X=x|Y=1)\\
&= -2\times\frac{2}{3}+0\times\frac{1}{3}+1\times 0\\
&= -\frac{4}{3}.
\end{aligned}$$

6. Pour calculer $\mathbb{E}[X|Y\neq 2]$ on utilise la définition de l'espérance conditionnelle :

$$\mathbb{E}[X|Y\neq 2] = \sum_{x\in X(\Omega)} x\,\mathbb{P}(X=x|Y\neq 2).$$

On doit donc d'abord calculer $\mathbb{P}(X=x|Y\neq 2)$. En appliquant la règle de Bayes, on a

$$\mathbb{P}(X=x|Y\neq 2)=\frac{\mathbb{P}(X=x,Y\neq 2)}{\mathbb{P}(Y\neq 2)}$$

Or l'évènement $\{Y\neq 2\}=\{Y=-1\}\cup\{Y=1\}$ avec une union disjointe. Donc

$$\mathbb{P}(X=x,Y\neq 2)=\mathbb{P}(X=x,Y=-1)+\mathbb{P}(X=x,Y=1)$$

ainsi que

$$\mathbb{P}(Y\neq 2)=\mathbb{P}(Y=-1)+\mathbb{P}(Y=1)$$

Donc

$$\mathbb{P}(X=x|Y\neq 2)=\frac{\mathbb{P}(X=x,Y=-1)+\mathbb{P}(X=x,Y=1)}{\mathbb{P}(Y=-1)+\mathbb{P}(Y=1)}=\frac{\mathbb{P}(X=x,Y=-1)+\mathbb{P}(X=x,Y=1)}{0.8}$$

En appliquant cette formule, d'après le tableau de la loi jointe du couple (X,Y), on obtient la loi conditionnelle résumée dans le tableau suivant :

x	-2	0	1
$\mathbb{P}(X=x\|Y\neq 2)$	$\frac{0.2+02}{0.8}=\frac{1}{2}$	$\frac{0.1+0.1}{0.8}=\frac{1}{4}$	$\frac{0.2+0}{0.8}=\frac{1}{4}$

Attention ! $\mathbb{P}(X=x|Y\neq 2)\neq 1-\mathbb{P}(X=x|Y=2)$. Ici, par exemple si on prend $x=-2$, on a

$$\begin{aligned}
1-\mathbb{P}(X=x|Y=2) &= 1-\frac{\mathbb{P}(X=-2,Y=2)}{\mathbb{P}(Y=2)}\\
&= 1-\frac{0.05}{0.2}\\
&= \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

alors que $\mathbb{P}(X=-2|Y\neq 2)=\frac{1}{2}$.
On en déduite ensuite l'espérance conditionnelle :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X|Y\neq 2] &= \sum_{x\in X(\Omega)} x\,\mathbb{P}(X=x|Y\neq 2)\\
&= -2\times\frac{1}{2}+0\times\frac{1}{4}+1\times\frac{1}{4}\\
&= -\frac{3}{4}.
\end{aligned}$$

7. On applique la propriété de l'espérance : pour toute fonction ϕ, on a

$$\mathbb{E}[\varphi(X,Y)] = \sum_{x\in X(\Omega)} \sum_{y\in Y(\Omega)} \varphi(x,y)\mathbb{P}(X=x, Y=y)$$

Pour le cas particulier de la v.a produit, on a donc $\varphi(X,Y) = XY$. Donc

$$\mathbb{E}[XY] = \sum_{x\in X(\Omega)} \sum_{y\in Y(\Omega)} xy\mathbb{P}(X=x, Y=y)$$

Le tableau suivant donne les calculs intermédiaires de $xy\mathbb{P}(X=x, Y=y)$ On obtient ainsi

$xy\mathbb{P}(X=x,Y=y)$	$y=-1$	$y=1$	$y=2$
$x=-2$	$2\times 0.2 = 0.4$	$-2\times 0.2 = -0.4$	$-4\times 0.05 = -0.2$
$x=0$	$0\times 0.1 = 0$	$0\times 0.1 = 0$	$0\times 0.05 = 0$
$x=1$	$-1\times 0.2 = -0.2$	$1\times 0 = 0$	$2\times 0.1 = 0.2$

$\mathbb{E}[XY] = -0.2$

8. On sait que $\text{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$. On calcule donc les espérances $\mathbb{E}[X]$ et $\mathbb{E}[Y]$ en utilisant la définition de l'espérance :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \sum_{x\in\mathcal{X}} x\,\mathbb{P}(X=x)\\ &= -2\times 0.45 + 0\times 0.25 + 1\times 0.3\\ &= -0.6\end{aligned}$$

De la même façon

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y] &= -1\times 0.5 + 1\times 0.3 + 2\times 0.2\\ &= 0.2\end{aligned}$$

On obtient finalement $\text{Cov}(X,Y) = -0.2 - (-0.6)\times 0.2 = -0.08$.

Exercice 29. Soit un couple de variables aléatoires (X,Y) tel que X prend ses valeurs dans $X(\Omega) = \{0,1,2\}$ et Y dans $Y(\Omega) = \{0,1,2,3\}$ dont la loi jointe est donnée par $\mathbb{P}(X=x, Y=y) = \alpha(2x+y)$.

1. Calculer la valeur de α en justifiant votre réponse.
2. En déduire $\mathbb{P}(X=2, Y=1)$.
3. Calculer les lois marginales de X et de Y.
4. X et Y sont-elles indépendantes ?
5. Calculer les lois conditionnelles de $X|Y$ et de $Y|X$.
6. En déduire $\mathbb{P}(X=0|Y=0)$
7. Calculer $\mathbb{E}[XY]$ en déduire $\text{Cov}(X,Y)$
8. Calculer le coefficient de corrélation $\rho_{X,Y} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}$.

Solution.

1. D'après la loi du couple, on a

$$\sum_{x\in X(\Omega)} \sum_{y\in Y(\Omega)} \mathbb{P}(X=x, Y=y) = 1$$

donc

$$\begin{aligned}
\sum_{x\in X(\Omega)}\sum_{y\in Y(\Omega)}\alpha(2x+y) &= \sum_{x=0}^{2}\sum_{y=0}^{3}\alpha(2x+y)=\alpha\sum_{x=0}^{2}\sum_{y=0}^{3}(2x+y)=\alpha\sum_{x=0}^{2}\left(4\times 2x+\sum_{y=0}^{3}y\right)\\
&= \alpha\sum_{x=0}^{2}(8x+6)=\alpha\left(3\times 6+\sum_{x=0}^{2}8x\right)=\alpha\,(18+24)=42\alpha=1
\end{aligned}$$

donc $\alpha=\frac{1}{42}$.

2. $\mathbb{P}(X=2,Y=1)=\frac{1}{42}(2\times 2+1)=\frac{5}{42}$
3. — La loi marginale de X est obtenue à partir de la loi jointe du couple par

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X=x) &= \sum_{y\in Y(\Omega)}\mathbb{P}(X=x,Y=y)\\
&= \sum_{y=0}^{3}\alpha(2x+y)=\alpha\left(4\times 2x+\sum_{y=0}^{3}y\right)=\alpha\,(8x+6)
\end{aligned}$$

— De la même façon, on obtient la loi marginale de Y

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y=y) &= \sum_{x\in X(\Omega)}\mathbb{P}(X=x,Y=y)\\
&= \sum_{x=0}^{2}\alpha(2x+y)=\alpha\left(\sum_{x=0}^{2}2x+3y\right)=\alpha\,(3y+6)
\end{aligned}$$

4. Les variables X et Y sont indépendantes si et seulement si pour tout $x\in X(\Omega)$ et $y\in Y(\Omega)$, $\mathbb{P}(X=x,Y=y)=\mathbb{P}(X=x)\mathbb{P}(Y=y)$. Pour montrer que les v.a. ne sont pas indépendantes, il suffit donc de trouver un contre exemple.
On remarque dans le tableau de la loi jointe que $\mathbb{P}(X=0,Y=0)=0$, alors que d'après les lois marginales de X et Y, $\mathbb{P}(X=0)\mathbb{P}(Y=0)=6\alpha\times 6\alpha\neq 0$. Les deux variables ne sont donc pas indépendantes.

   On peut également voir que d'après les expressions des lois jointe et marginales on a $\mathbb{P}(X=x,Y=y)\neq\mathbb{P}(X=x)\mathbb{P}(Y=y)$
5. — On utilise la définition de la loi conditionnelle (règle de bayes) $\mathbb{P}(X=x|Y=y)=\frac{\mathbb{P}(X=x,Y=y)}{\mathbb{P}(Y=y)}$. D'après l'expression de la loi jointe du couple celle de la loi marginale de Y, la loi conditionnelle $\mathbb{P}(X=x|Y=y)$ est donc donnée par

$$\mathbb{P}(X=x|Y=y) = \frac{\mathbb{P}(X=x,Y=y)}{\mathbb{P}(Y=y)}=\frac{\alpha\,(2x+y)}{\alpha\,(3y+6)}=\frac{2x+y}{3y+6}$$

— De la même façon on trouve la loi conditionnelle $\mathbb{P}(Y=y|X=x)$:

$$\mathbb{P}(Y=y|X=x) = \frac{\mathbb{P}(X=x,Y=y)}{\mathbb{P}(X=x)}=\frac{\alpha\,(2x+y)}{\alpha\,(8x+6)}=\frac{2x+y}{8x+6}$$

6. En utilisant l'expression de la loi conditionnelle $\mathbb{P}(X=x|Y=x)=\frac{2x+y}{3y+6}$ on obtient

$$\mathbb{P}(X=0|Y=0)=0$$

7. On applique la propriété de l'espérance : pour toute fonction ϕ, on a

$$\mathbb{E}[\varphi(X,Y)]=\sum_{x\in X(\Omega)}\sum_{y\in Y(\Omega)}\varphi(x,y)\mathbb{P}(X=x,Y=y)$$

Pour le cas particulier de la v.a produit, on a donc $\varphi(X,Y) = XY$. Donc

$$\mathbb{E}[XY] = \sum_{x\in X(\Omega)} \sum_{y\in Y(\Omega)} xy\mathbb{P}(X=x, Y=y)$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[XY] &= \sum_{x\in X(\Omega)} \sum_{y\in Y(\Omega)} xy\mathbb{P}(X=x, Y=y) = \alpha \sum_{x=0}^{2}\sum_{y=0}^{3} xy(2x+y) \\
&= \alpha \sum_{x=0}^{2} x \left(\sum_{y=0}^{3} (2xy + y^2) \right) = \alpha \sum_{x=0}^{2} x \left(2x \sum_{y=0}^{3} y + \sum_{y=0}^{3} y^2) \right) = \alpha \sum_{x=0}^{2} x(2x \times 6 + 14) \\
&= \alpha \sum_{x=0}^{2} (12x^2 + 14x) = \alpha \times (12 \times 5 + 14 \times 3) = 102\,\alpha.
\end{aligned}$$

On obtient ainsi $\mathbb{E}[XY] = 102\,\alpha = \frac{17}{7}$

8. On sait que $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$. On calcule donc les espérances $\mathbb{E}[X]$ et $\mathbb{E}[Y]$ en utilisant la définition de l'espérance :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \sum_{x\in X(\Omega)} x\,\mathbb{P}(X=x) \\
&= \sum_{x=0)}^{2} x\,\alpha(8x+6) \\
&= 58\,\alpha
\end{aligned}$$

De la même façon

$$\mathbb{E}[Y] = 78\,\alpha$$

On obtient finalement $\mathrm{Cov}(X,Y) = 102\alpha - 58\,\alpha \times 78\,\alpha$.

9. Le coefficient de corrélation est donné par

$$\rho_{X,Y} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}} = ..$$

⋆

Exercice 30. Soit une expérience aléatoire qui consiste à lancer dix fois de suite une pièce de monnaie truquée où la probabilité d'avoir Face (succès) pour un lancer est $p = 0.6$.

1. Calculer la probabilité d'avoir cinq fois Face à l'issue de cette expérience ;
2. Calculer le nombre moyen de Face qu'on peut avoir à l'issue de cette expérience.

Solution.

1. Un lancer correspond à une expérience de Bernoulli avec le paramètre $p = 0.6$ (probabilité du succès). La répétition de l'expérience de Bernoulli pour n lancers (qu'on peut supposer indépendants) correspond alors à une expérience Binomiale de paramètres (n,p) : $\mathcal{B}(n,p)$. Soit X la variable aléatoire qui modélise cette expérience (X représente le nombre de succès dans les n épreuves de Bernoulli). Pour 10 lancers de cette pièce, on a donc $n = 10$ et d'après la définition de la loi Binomiale on a la probabilité d'avoir cinq succès

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X=x) &= C_n^x\, p^x (1-p)^{n-x} \\
\mathbb{P}(X=5) &= C_{10}^5\, 0.6^5 0.4^{10-5} = \frac{10!}{5!5!} 0.6^5 0.4^5 = 0.2007
\end{aligned}$$

2. L'espérance d'une v.a. $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ est np. Le nombre moyen de Face qu'on peut avoir dans 10 lancers est donc $0.6 \times 10 = 6$.
   Pour démontrer le calcul de l'espérance, on part du fait que l'on sait qu'une v.a. X suivant une loi Binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ est la somme de n de n v.a. indépendantes $Y_1, \ldots, Y_n$ dont chacune suit une loi de Bernoulli de paramètre p (Y_i prend 1 en cas de succès au $i$ème lancer et 0 sinon). L'espérance de Y_i vaut p (évident à prouver car Y_i est une v.a. binaire). On a donc $X = \sum_{i=1}^{n} Y_i$, et
$$\mathbb{E}[X] \quad = \quad \mathbb{E}[\sum_{i=1}^{n} Y_i] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[Y_i] = \sum_{i=1}^{n} p = np$$
3. de même pour la variance, on trouve $np(1-p)$

Exercice 31. Un propriétaire vient d'installer vingt ampoules dans une nouvelle maison. Supposons que chacune a une probabilité de 0.2 de fonctionner plus de trois mois. On suppose que les ampoules fonctionnent de façon indépendante.

1. Quelle est la probabilité qu'au moins cinq d'entre elles fonctionnent plus de trois mois ?
2. Quel est le nombre moyen d'ampoules que le propriétaire doit remplacer dans trois mois ?

Solution.
Soit X la v.a. représentant le nombre d'ampoules qui fonctionnent plus de trois mois (succès). X suit donc une loi binomiale de paramètres $(n = 20, p = 0.2)$: $\mathcal{B}(20, 0.2)$. On a donc $\mathbb{P}(X = x) = C_n^x\, p^x(1-p)^{n-x}$

1. La probabilité qu'au moins cinq des 20 ampoules fonctionnent plus de trois mois est donc donnée par
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \geq 5) \quad &= \quad \sum_{x=5}^{20} \mathbb{P}(X = x) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 4) = 1 - \sum_{x=0}^{4} \mathbb{P}(X = x) \\ &= \quad 1 - \sum_{x=0}^{4} C_20^x\, 0.2^x 0.8^{20-x} \\ &= \quad 1 - (0.012 + 0.058 + 0.137 + 0.205 + 0.218) = 0.37\end{aligned}$$
2. Le nombre moyen d'ampoules que le propriétaire doit remplacer dans trois mois est donné par
$$20 - \mathbb{E}[X] = 20 - np = 20 - 20 \times 0.2 = 16$$
   $\mathbb{E}[X]$ étant le nombre d'ampoules moyens qui fonctionnent pour plus de trois mois.

Exercice 32. A la fin d'une chaîne de fabrication de bouteilles, celles-ci sont placées par lots de 960 bouteilles emballées. 200 lots ainsi formés sont vérifiés. Pour 72 d'entre eux, on a trouvé une bouteille cassée et pour 29 lots on a trouvé deux bouteilles cassées. Soit X la v.a. représentant le nombre de bouteilles cassées par lot. Trouver la probabilité que la bouteille soit cassée à la sortie de la machine et calculer les premières valeurs de $\mathbb{P}(X = x)$.

Exercice 33. Un automobiliste attend de prendre une place de stationnement à une certaine distance de lui dans une rue. Il y a cinq voitures devant lui, chacune d'entre elles ayant une probabilité de 0.2 de prendre cette place. Quelle est la probabilité que la voiture juste devant lui prenne la place de stationnement ?

Solution.
Ce problème peut être modélisé avec une loi géométrique de paramètre $p = 0.2$. En effet, si on considère que l'expérience dont la probabilité de succès est p et celle d'échec $q = 1 - p$ est celle qui correspond à ce qu'une voiture prenne ou non la place de parking ($p = 0.2$). Celle-ci correspond donc à une expérience de Bernoulli de paramètre p. Si on considère cette expérience pour les voitures devant le conducteur (qu'on peut supposer indépendantes), le fait que la cinquième voiture prenne la place du parking correspond à

"avoir un succès au rang 5". Si on appelle X la variable aléatoire donnant le rang du premier succès de cette expérience, les réalisations x de X sont donc les entiers naturels non nuls 1, 2, 3, 4, 5 et X suit une loi géométrique de paramètre $p = 0.2$: $X \sim \mathcal{G}(0.2)$. Dans ce cas, nous cherchons donc à évaluer $\mathbb{P}(X = 5)$ qui par définition de la loi géométrique vaut

$$\mathbb{P}(X = x) = \mathcal{G}(x; p) = pq^{x-1} = 0.20.8^4 \simeq 0.082.$$

Ce qui peut sembler très petit comme probabilité que ce que nous vivons dans des situations similaires !

Exercice 34. Un téléopérateur reçoit en moyenne dix appels par jour. On suppose que le nombre d'appels est distribué selon une loi de Poisson. Calculer la probabilité qu'un jour le téléopérateur reçoive :

1. aucun appel ;
2. 5 appels ;
3. au moins 13 appels.

Solution.
On note par X la variable aléatoire donnant le nombre d'appels reçus par jour par le téléopérateur. Par hypothèse, X est distribuée selon une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ de paramètre λ et telle que $\mathbb{E}[X] = 10$. Or, on sait que si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $\mathbb{E}[X] = 10$, donc $\lambda = 10$ (nombre moyen d'appels).

1. Comme $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, on a $\mathbb{P}(X = x) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}$. Donc

$$\mathbb{P}(X = 0) = e^{-10}\frac{10^0}{0!} = e^{-10} \simeq 0.000045$$

2. On appliquant à nouveau la formule de la loi de poisson, on a

$$\mathbb{P}(X = 5) = e^{-10}\frac{10^5}{5!} \simeq 0.038 = 3.8\%$$

3. Il s'agit de calculer $\mathbb{P}(X \geq 13)$. Pour calculer cette probabilité, on note que l'évènement

$$\overline{\{X \geq 13\}} = \{X \leq 12\} = \cup_{x=0}^{x=12}\{X = x\}$$

(car X prend uniquement des valeurs entières) qui s'écrit donc sous forme d'une union disjointe d'évènements $\{X = x\}$ pour lesquels on connaît les probabilités (grâce à la loi de X). Le passage au complémentaire ici évite d'avoir à écrire une somme infinie pour $\{X \geq 13\}$. On a donc

$$\mathbb{P}(X \geq 13\}) = 1-\mathbb{P}(\{X \leq 12\}) = 1-\mathbb{P}(\cup_{x=0}^{x=12}\{X = x\}) = 1-\sum_{x=0}^{x=12}\mathbb{P}(\{X = x\}) = 1-e^{-10}\sum_{x=0}^{x=12}\frac{10^x}{x!} = 0.2084 = 20.84\%$$

.

Exercice 35. Soit X une variable aléatoire discrète uniforme prenant ses valeurs dans l'ensemble $X(\Omega) = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$.

1. Donner la loi de probabilités de X ;
2. calculer l'espérance de X ;
3. On donne $\sum_{x=1}^{n} x^2 = \frac{(2n+1)(n+1)n}{6}$. Calculer la variance de X.

Solution.

1. X suit une loi uniforme, donc $\forall x \in X(\Omega)$ on a $\mathbb{P}(X = x) = \frac{1}{|X(\Omega)|} = \frac{1}{n}$.

2. Pour le calcul de $\mathbb{E}[X]$, on applique la définition de l'espérance :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \sum_{x\in X(\Omega)} x\,\mathbb{P}(X=x)\\ &= \frac{1}{n}\sum_{x=1}^{n} x\\ &= \frac{1}{n}\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}\end{aligned}$$

où $\sum_{x=1}^{n} x = \frac{n(n+1)}{2}$ correspond à la somme des termes d'une suite arithmétique de raison 1.

3. On sait que $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$. Il reste dont à calculer $\mathbb{E}[X^2]$. Pour ce faire, on applique la propriété de l'espérance : pour toute fonction ϕ, on a

$$\mathbb{E}[\varphi(X)] = \sum_{x\in X(\Omega)} \varphi(x)\mathbb{P}(X=x)$$

Pour le cas particulier de la v.a carré, on a $\varphi(X) = X^2$. Donc

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X^2] &= \sum_{x\in X(\Omega)} x^2\,\mathbb{P}(X=x)\\ &= \frac{1}{n}\sum_{x=1}^{n} x^2\\ &= \frac{1}{n}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}.\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X) &= \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4}\\ &= \frac{n+1}{12}(4n+2-3(n+1))\\ &= \frac{n+1}{12}(n-1)\\ &= \frac{n^2-1}{12}\end{aligned}$$