Université de Caen
Licence 3 MIASHS-Maths

Probabilités et Statistique
Année 2017-2018

TD (suite)

Exercice 1. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a. identiquement distribuées suivant une loi Binomiale de paramètres n et p. Soit $\lambda = np > 0$. Montrer que (X_n) converge vers une v.a de Poisson de paramètre λ. On parle d'approximation poissonniènne de la loi Binomiale.
Indication : On sait que $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{c}{n}\right)^n = \mathrm{e}^c$.

Solution. *On a* $p = \frac{\lambda}{n}$*, donc*

$$\mathbb{P}(X=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \tag{1}$$

$$\mathbb{P}(X=k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \tag{2}$$

$$= \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}\times\frac{\lambda^k}{n^k}\times\frac{n^k}{(n-\lambda)^k}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \tag{3}$$

$$\tag{4}$$

Or, on sait que lorsque $n\to+\infty$, $n(n-1)\dots(n-k+1)\sim n^k$ *et* $\left(1+\frac{a}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^a$ *donc :*

$$\mathbb{P}(X=k) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^k}{k!}\times\frac{\lambda^k}{n^k}\times\frac{n^k}{n^k}\times\mathrm{e}^{-\lambda} = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

Exercice 2. La probabilité qu'un système tombe en panne est de 0.015. Calculer de deux façons différentes la probabilité qu'il n'y ai aucun système défectueux dans un ensemble de 100.

Solution. Soit X la v.a désignant le nombre de systèmes défectueux dans le lot de 100. On cherche à calculer $\mathbb{P}(X=0)$ ou X suit une loi Binomiale avec $p = 0.015$ et $n = 100$ et peut être approchée par une v.a de Poisson de paramètre $\Lambda = 1.5$

Exercice 3. Soient X et Y deux v.a. indépendantes. On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et Y suit une loi de Poisson de paramètre $\mu > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on notera $p_n = \mathbb{P}(X=n)$ et $q_n = \mathbb{P}(Y=n)$.

1. Montrer que la variable $Z = X+Y$ suit une loi de Poisson dont on déterminera le paramètre. Trouver l'espérance et la variance de Z
2. Soit $k \in \mathbb{N}$. Déterminer la loi conditionnelle de X sachant que $Z = k$.
3. On pose $U = X - Y$
   - i) Trouver l'espérance et la variance de U
   - ii) Déterminer l'ensemble des valeurs que peut prendre U. La variable U est-elle une variable de Poisson ?
   - iii) Trouver la loi conditionnelle de U sachant que $Z = k$, où $k \in \mathbb{N}$ (on pourra utiliser le résultat de la question 2).

Rappels

— Une v.a. X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ ssi

$$\forall i \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X=i) = \frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda}.$$

— $\sum_{i=0}^{k} C_k^i a^i b^{k-i} = (a+b)^k$
— $C_k^i = \frac{k!}{i!(k-i)!}$
— Soit X une v.a. telle que

$$\forall i \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X=i) = C_k^i\ p^i\ (1-p)^{k-i}$$

où $k \geq 0$ et $0 \leq p \leq 1$ alors X suit une loi Binomiale de paramètres k et p.

Solution.

1. $Z = X + Y$ est à valeurs dans $\mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z=k) &= \mathbb{P}(X+Y=k) = \sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}(X=i; Y=k-i) \\
&= \sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}(X=i)\mathbb{P}(Y=k-i) = \sum_{i=0}^{k} p_i\ q_{k-i} \\
&= \sum_{i=0}^{k} \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} \frac{\mu^{k-i}}{(k-i)!} e^{-\mu} \\
&= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!} \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!(k-i)!} \lambda^k \mu^{k-i} \\
&= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!} \sum_{i=0}^{k} C_k^i \lambda^k \mu^{k-i} = \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!} (\lambda+\mu)^k
\end{aligned}$$

ce qui montre que Z suit une loi Poisson de paramètre $\lambda + \mu$. En particulier on sait que

$$\mathbb{E}(Z) = \mathbb{V}(Z) = \lambda + \mu$$

2. On sait que $Z = k$, alors X ne peut plus prendre ses valeurs qu'entre 0 et k. Pour $i \in [|0, k|]$ et d'après le théorème de Bayes on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X=i|Z=k) &= \frac{\mathbb{P}(X=i; Z=k)}{\mathbb{P}(Z=k)} = \frac{\mathbb{P}(X=i; Y=k-i)}{\mathbb{P}(Z=k)} = \frac{\mathbb{P}(X=i)\mathbb{P}(Y=k-i)}{\mathbb{P}(Z=k)} \\
&= (\frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda})(\frac{\mu^{k-i}}{(k-i)!} e^{-\mu})(\frac{k!}{e^{-(\lambda+\mu)}(\lambda+\mu)^k}) \\
&= \frac{k!}{i!(k-i)!}\ \lambda^i \mu^{k-i}\ e^{-(\lambda+\mu)} \frac{1}{e^{-(\lambda+\mu)}(\lambda+\mu)^k} \\
&= C_k^i \frac{\lambda^i \mu^{k-i}}{(\lambda+\mu)^k} = C_k^i \frac{\lambda^i}{(\lambda+\mu)^i} \frac{\mu^{k-i}}{(\lambda+\mu)^{k-i}} \\
&= C_k^i \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^i \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{k-i}
\end{aligned}$$

et on reconnait ainsi la loi Binominale de paramètres k et $\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$:

$$X|Z=k \sim \mathcal{B}(k, \frac{\lambda}{\lambda+\mu})$$

3. On pose $U = X - Y$
   i) On a $\mathbb{E}(U) = \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(Y) = \lambda - \mu$, par linéarité de l'espérance.
   D'autre part, comme X et Y sont indépendantes, il en est de même de X et $-Y$, et on peut écrire : $\mathbb{V}(U) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(-Y) = \mathbb{V}(X) + (-1)^2\mathbb{V}(Y) = \lambda + \mu$

ii) X et Y prennent des valeurs dans $\mathbb{N}$ indépendamment l'une de l'autre et donc $(X-Y)(\Omega)=\mathbb{Z}$, ce qui prouve que $X-Y$ ne peut pas être une variable de Poisson.

iii) On a $U=X-Y=2X-(X+Y)=2X-Z$. Si on sait que $Z=k$, $k\in\mathbb{N}$, alors X ne peut plus prendre ses valeurs qu'entre 0 et k et : Pour $i\in[|0,k|]$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(U=2i-k|Z=k) &= \mathbb{P}(X=i|Z=k)\\ &= C_k^i\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^i\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{k-i}\end{aligned}$$

U prenant donc ses valeurs dans l'ensemble $\{-k,-k+2,\ldots,k-2,k\}$.

⋆

Exercice 4. Déterminer l'unique entier a tel que la fonction f définie ci-dessous soit une densité :

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}x^{a+1} & \text{si } x\in[0,2],\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Solution. La fonction f vérifie :
— pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)\geq 0$.
— f est continue sur $\mathbb{R}-\{2\}$.
Le troisième point que f doit vérifier est la condition de normalisation :

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=1.$$

On a

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=\frac{1}{4}\int_0^2 x^{a+1}dx=\frac{1}{4}\left[\frac{x^{a+2}}{a+3}\right]_0^2=\frac{2^{a+2}}{4(a+2)}.$$

Donc $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=1$ si, et seulement si, $2^{a+2}=4(a+2)$ e.q $2^a=2+a$. Donc f est une densité si, et seulement si, $a=2$.
Preuve par récurrence H_n : $2^n>2n>2+n$ pour $n>2$.

Exercice 5. Soit X une *v.a.* suivant la loi uniforme $\mathcal{U}_{[0,1]}$, *i.e.* de densité :

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{si } x\in[0,1],\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

1. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathrm{Var}(X)$.
2. Montrer que la *v.a.* $Z=1-X$ suit la même loi que X.
3. Soit $\lambda>0$. On pose

$$Y=-\frac{\ln(1-X)}{\lambda}.$$

Calculer la fonction de répartition de Y, puis une densité de Y.

Solution.

1. On a

$$\mathbb{E}(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=\int_0^1 xdx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1=\frac{1}{2}.$$

De même,

$$\mathbb{E}\left(X^2\right)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2f(x)dx=\int_0^1 x^2dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{3}.$$

On en déduit que

$$\mathbb{V}(X)=\mathbb{E}\left(X^2\right)-(\mathbb{E}(X))^2=\frac{1}{3}-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}.$$

2. Calculons la fonction de répartition de Z. Comme $X(\Omega) = [0,1]$, on a $Z(\Omega) = (1-X)(\Omega) = [1-1, 1-0] = [0,1]$. On en déduit que, pour $x > 1$, on a
$$\mathbb{P}(Z \leq x) = 1.$$
Pour tout $x < 0$, on a
$$\mathbb{P}(Z \leq x) = 0.$$
Pour tout $x \in [0,1]$, on a
$$\mathbb{P}(Z \leq x) = \mathbb{P}(X \geq 1-x) = \int_{1-x}^{\infty} f(t)dt = \int_{1-x}^{1} dx = 1-(1-x) = x.$$
Au final, la fonction de répartition de Z est
$$F_Z(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 1, \\ x & \text{si } x \in [0,1], \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$
Après un calcul similaire, on montre que la fonction de répartition de X est
$$F_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 1, \\ x & \text{si } x \in [0,1], \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$
Puisque, pour tout $x \in \mathbb{R}$, les fonctions de répartition de Z et X sont égales, la loi de Z est la même que celle de X. Autrement dit, Z suit la loi Uniforme sur l'intervalle $[0,1]$.
3. Calculons la fonction de répartition de Y. Comme $X(\Omega) = [0,1]$, on a $(1-X)(\Omega) = [0,1]$ et $Y(\Omega) = (-\frac{1}{\lambda}\ln(1-X))(\Omega) = [0,\infty[$. Ainsi, pour tout $x < 0$, on a
$$\mathbb{P}(Y \leq x) = 0.$$
Pour tout $x \geq 0$, en utilisant le résultat de la question 2-, on a
$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y \leq x) &= \mathbb{P}(-\ln(1-X) \leq \lambda x) = \mathbb{P}(\ln(1-X) \geq -\lambda x) \\ &= \mathbb{P}\left(1-X \geq e^{-\lambda x}\right) = \mathbb{P}(X \leq 1-e^{-\lambda x}) \\ &= \int_{-\infty}^{1-e^{-\lambda x}} f(t)dt = \int_{0}^{1-e^{-\lambda x}} dt = 1-e^{-\lambda x}. \end{aligned}$$
Au final, la fonction de répartition de Y est
$$F_Y(x) = \begin{cases} 1-e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
On reconnaît la fonction de répartition d'une v.a.r. suivant la loi Exponentielle de paramètre λ.

Exercice 6. Soient $\theta > 0$ et X une *v.a.* de densité :
$$f(x) = \begin{cases} (\theta+1)(\theta+2)(1-x)x^{\theta} & \text{si } x \in [0,1], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
1. Vérifier que f est bien une densité.
2. Calculer $\mathbb{E}(X)$.

Solution.

1. On a

— pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$,
— f est continue sur $\mathbb{R}$,
—

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx &= \int_0^1 (\theta+1)(\theta+2)(1-x)x^\theta dx = (\theta+1)(\theta+2)\int_0^1 (x^\theta - x^{\theta+1})dx \\
&= (\theta+1)(\theta+2)\left[\frac{x^{\theta+1}}{\theta+1} - \frac{x^{\theta+2}}{\theta+2}\right]_0^1 \\
&= (\theta+1)(\theta+2)\left(\frac{1}{\theta+1} - \frac{1}{\theta+2}\right) = 1.
\end{aligned}$$

Donc f est bien une densité.

2. On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_0^1 x(\theta+1)(\theta+2)(1-x)x^\theta dx \\
&= (\theta+1)(\theta+2)\int_0^1 (x^{\theta+1} - x^{\theta+2})dx = (\theta+1)(\theta+2)\left[\frac{x^{\theta+2}}{\theta+2} - \frac{x^{\theta+3}}{\theta+3}\right]_0^1 \\
&= (\theta+1)(\theta+2)\frac{1}{(\theta+2)(\theta+3)} = \frac{\theta+1}{\theta+3}.
\end{aligned}$$

Exercice 7. Soient $\theta > 1$ et X une *v.a.* de densité :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x\ln(\theta)} & \text{si } x \in [1, \theta], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathrm{Var}(X)$.
2. Montrer que, pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que $1 \leq a < b \leq \theta$ et $1 \leq ac < bc \leq \theta$, on a

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \mathbb{P}(ac \leq X \leq bc).$$

3. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. On pose $Y = X^m$. Déterminer une densité de Y.

Solution.

1. On a

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_1^\theta x \times \frac{1}{x\ln\theta}dx = \frac{1}{\ln\theta}\int_1^\theta dx = \frac{\theta-1}{\ln\theta}.$$

On a $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$, avec

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \int_1^\theta x^2 \times \frac{1}{x\ln\theta}dx = \frac{1}{\ln\theta}\int_1^\theta xdx = \frac{1}{\ln\theta}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^\theta = \frac{\theta^2-1}{2\ln\theta}.$$

On en déduit que

$$\mathbb{V}(X) = \frac{\theta^2-1}{2\ln\theta} - \left(\frac{\theta-1}{\ln\theta}\right)^2$$

2. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que $1 \leq a < b \leq \theta$ et $1 \leq ac < bc \leq \theta$. On a

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b \frac{1}{x\ln\theta}dx = \frac{1}{\ln\theta}\left[\ln x\right]_a^b = \frac{\ln b - \ln a}{\ln\theta}$$

et

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(ac \leq X \leq bc) &= \int_{ac}^{bc} f(x)dx = \int_{ac}^{bc} \frac{1}{x\ln\theta}dx = \frac{1}{\ln\theta}\left[\ln x\right]_{ac}^{bc} \\ &= \frac{\ln(bc)-\ln(ac)}{\ln\theta} = \frac{\ln b + \ln c - (\ln a + \ln c)}{\ln\theta} = \frac{\ln b - \ln a}{\ln\theta}.\end{aligned}$$

D'où

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \mathbb{P}(ac \leq X \leq bc).$$

3. On a $Y(\Omega) = (X^m)(\Omega) = [1, \theta^m]$. Par conséquent, pour tout $x > \theta^m$, on a

$$\mathbb{P}(Y \leq x) = 1$$

et, pour tout $x < 1$,

$$\mathbb{P}(Y \leq x) = 0.$$

Pour tout $x \in [1, \theta^m]$, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y \leq x) &= \mathbb{P}(X^m \leq x) = \mathbb{P}(X \leq x^{\frac{1}{m}}) = \int_{-\infty}^{x^{\frac{1}{m}}} f(y)dy = \int_{1}^{x^{\frac{1}{m}}} \frac{1}{y\ln\theta}dy \\ &= \frac{1}{\ln\theta}\left[\ln y\right]_1^{x^{\frac{1}{m}}} = \frac{\ln(x^{\frac{1}{m}}) - \ln 1}{\ln\theta} = \frac{\ln x}{m\ln\theta} = \frac{\ln x}{\ln(\theta^m)}.\end{aligned}$$

Au final, la fonction de répartition de Y est

$$F_Y(x) = \mathbb{P}(Y \leq x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > \theta^m, \\ \dfrac{\ln x}{\ln(\theta^m)} & \text{si } x \in [1, \theta^m], \\ 0 & \text{si } x < 1. \end{cases}$$

La densité de Y est

$$f_Y(x) = F_Y'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x\ln(\theta^m)} & \text{si } x \in [1, \theta^m], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On reconnaît la densité associée à la loi de Benford de paramètre θ^m.

Exercice 8. Soit X une *v.a.* suivant la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ de paramètre $\lambda > 0$, *i.e.* de densité :

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Calculer $\mathbb{P}(0 < X \leq 1)$, $\mathbb{P}(X > 3)$
2. Y a-t-il une différence entre $\mathbb{P}(0 < X \leq 1)$ est $\mathbb{P}(0 \leq X \leq 1)$?
3. Calculer $\mathbb{E}[X]$
4. Calculer $\mathrm{Var}[X]$
5. Déterminer la fonction de répartition de X

Solution.

1.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \int_0^{+\infty} xf(x;\lambda)\mathrm{d}x && (5)\\ &= \int_0^{+\infty} x\lambda e^{-\lambda x}\mathrm{d}x && (6)\\ &= \lambda\int_0^{+\infty} xe^{-\lambda x}\mathrm{d}x && (7)\\ & && (8)\end{aligned}$$

puis en passant par une intégration par parties,
(rappel : $U'V = [UV]' - V'U$ donc $\int_0^{+\infty} U'V = [UV]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} V'U$)
et en prenant
$U' = e^{-\lambda x}$
$V = x$
$\Rightarrow U'V = xe^{-\lambda x}$
et
$U = \frac{-e^{-\lambda x}}{\lambda}$
$V' = 1$
$\Rightarrow UV = xe^{-\lambda x}$ et $V'U = \frac{-e^{-\lambda x}}{\lambda}$
on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \lambda\int_0^{+\infty} xe^{-\lambda x}\mathrm{d}x && (9)\\ &= \lambda\left(\left[xe^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty}\frac{-e^{-\lambda x}}{\lambda}\mathrm{d}x\right) && (10)\\ &= \lambda\left(\left[\lim_{x\to+\infty} xe^{-\lambda x} - 0\right] - \left[\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda^2}\right]_0^{+\infty}\right) && (11)\\ &\overset{\text{Règle de l'Hopital}}{=} \lambda\left([0-0] - \left[\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda^2}\right]_0^{+\infty}\right) && (12)\\ &= \lambda\left(-\left[\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda^2}\right]_0^{+\infty}\right) && (13)\\ &= \lambda\left(-\left[0 - \frac{1}{\lambda^2}\right]\right) && (14)\\ &= \frac{1}{\lambda} && (15)\end{aligned}$$

2. de même pour la variance, on en trouve $\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

Exercice 9. Soit X une *v.a.* suivant la loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$, *i.e.* de densité :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \geq 0,\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

On pose $Y = \ln(e^X - 1)$.

1. Déterminer la fonction de répartition de Y, puis une densité de Y.
2. Est-ce que Y est une *v.a.* symétrique ?
3. Calculer $\mathbb{E}(Y)$.

Solution.

1. On a $Y(\Omega) = (\ln(e^X - 1))(\Omega) = \mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y \leq x) &= \mathbb{P}(\ln(e^X - 1) \leq x) = \mathbb{P}(e^X - 1 \leq e^x) = \mathbb{P}(e^X \leq e^x + 1) \\
&= \mathbb{P}(X \leq \ln(e^x + 1)) = \int_{-\infty}^{\ln(e^x+1)} f(t)dt = \int_0^{\ln(e^x+1)} e^{-t}dt \\
&= \left[-e^{-t}\right]_0^{\ln(e^x+1)} = 1 - e^{-\ln(e^x+1)} = 1 - \frac{1}{e^x + 1} = \frac{e^x}{e^x + 1}.
\end{aligned}$$

   Au final, la fonction de répartition de Y est

$$F_Y(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

   La densité de Y s'obtient par dérivation :

$$f_Y(x) = F_Y'(x) = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

2. La densité de Y déterminée au résultat de la question 1- vérifie, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_Y(-x) = \frac{e^{-x}}{(e^{-x} + 1)^2} = \frac{e^{2x}}{e^{2x}} \times \frac{e^{-x}}{(e^{-x} + 1)^2} = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} = f_Y(x).$$

   Ainsi, f_Y est paire, donc Y est symétrique.
3. Par le résultat de la question 2-, Y est symétrique. Donc $\mathbb{E}(Y) = 0$.

Exercice 10. Soit X une v.a. suivant la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$, *i.e.* de densité :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

On pose $Y = |X| + 1$.

1. Déterminer la fonction de répartition de Y en fonction de celle de X, puis une densité de Y.
2. Calculer $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathrm{Var}(Y)$.

Solution.

1. On a $X(\Omega) = \mathbb{R}$. Donc $(|X|)(\Omega) = [0, \infty[$ et $Y(\Omega) = [1, \infty[$. Par conséquent, pour tout $x < 1$, on a

$$\mathbb{P}(Y \leq x) = 0.$$

   Pour tout $x \geq 1$, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y \leq x) &= \mathbb{P}(|X| + 1 \leq x) = \mathbb{P}(|X| \leq x - 1) \\
&= \mathbb{P}(-(x - 1) \leq X \leq x - 1) \\
&= \mathbb{P}(X \leq x - 1) - \mathbb{P}(X \leq -(x - 1)).
\end{aligned}$$

   Au final, en notant F_X la fonction de répartition de X, la fonction de répartition de Y est

$$F_Y(x) = \begin{cases} F_X(x - 1) - F_X(-(x - 1)) & \text{si } x \geq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

   Par dérivation, on en déduit la densité de Y :

$$f_Y(x) = F_Y'(x) = \begin{cases} f(x - 1) + f(-(x - 1)) & \text{si } x \geq 1, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

   avec

$$f(x - 1) + f(-(x - 1)) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-1)^2}{2}}.$$

2. Par la linéarité de l'espérance, on a

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(|X|) + 1,$$

avec

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(|X|) &= \int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |x| e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} x e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[-e^{-\frac{x^2}{2}} \right]_0^{\infty} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}.\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\mathbb{E}(Y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} + 1.$$

En utilisant les opérations élémentaires de la variance, on a

$$\mathbb{V}(Y) = \mathbb{V}(|X| + 1) = \mathbb{V}(|X|) = \mathbb{E}\left(|X|^2\right) - \left(\mathbb{E}(|X|)\right)^2.$$

Or, comme X suit la loi normale centrée réduite, on a

$$\mathbb{E}\left(|X|^2\right) = \mathbb{E}\left(X^2\right) = \mathbb{V}(X) = 1.$$

Comme $\mathbb{E}(|X|) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$, on obtient

$$\mathbb{V}(Y) = 1 - \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)^2 = 1 - \frac{2}{\pi}.$$

Exercice 11. Soit X une *v.a.* de densité :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(2\ln(2))(2+x)} & \text{si } x \in [-1, 2], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Calculer $\mathbb{P}(X < 0)$.
2. Calculer $\mathbb{E}(2 + X)$, $\mathbb{E}\left(X(2 + X)\right)$ et $\mathbb{E}\left(X^2\right)$.
3. On pose

$$Y = \frac{1}{3 - X}.$$

Déterminer une densité de Y.

Solution.

1. On a

$$\mathbb{P}(X < 0) = \int_{-\infty}^{0} f(x) dx = \int_{-1}^{0} \frac{1}{(2\ln 2)(2 + x)} dx = \frac{1}{2\ln 2} \left[\ln(2 + x)\right]_{-1}^{0} = \frac{1}{2\ln 2} \times \ln 2 = \frac{1}{2}.$$

2. On a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(2 + X) &= \int_{-\infty}^{\infty} (2 + x) f(x) dx = \int_{-1}^{2} (2 + x) \times \frac{1}{(2\ln 2)(2 + x)} dx \\ &= \frac{1}{2\ln 2} \int_{-1}^{2} dx = \frac{1}{2\ln 2}(2 - (-1)) = \frac{3}{2\ln 2}.\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(X(2+X)\right) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(2+x)f(x)dx = \int_{-1}^{2} x(2+x)\times\frac{1}{(2\ln 2)(2+x)}dx\\ &= \frac{1}{2\ln 2}\int_{-1}^{2} xdx = \frac{1}{2\ln 2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{2} = \frac{1}{2\ln 2}\left(\frac{4}{2}-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4\ln 2}.\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(X^2\right) &= \mathbb{E}\left(X(2+X)\right) - 2\mathbb{E}\left(X\right) = \mathbb{E}\left(X(2+X)\right) - 2\mathbb{E}\left(2+X\right)+4\\ &= \frac{3}{4\ln 2} - 2\times\frac{3}{2\ln 2}+4 = \frac{3}{4\ln 2}-\frac{3}{\ln 2}+4 = -\frac{9}{4\ln 2}+4.\end{aligned}$$

3. On a $X(\Omega)=[-1,2]$. Par conséquent, $(3-X)(\Omega)=[1,4]$ et, a fortiori, $Y(\Omega)=\left(\frac{1}{3-X}\right)(\Omega)=\left[\frac{1}{4},1\right]$.
Pour tout $x>1$, on a

$$\mathbb{P}(Y\leq x)=1.$$

Pour tout $x<\frac{1}{4}$, on a

$$\mathbb{P}(Y\leq x)=0.$$

Pour tout $x\in\left[\frac{1}{4},1\right]$, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y\leq x) &= \mathbb{P}\left(\frac{1}{3-X}\leq x\right) = \mathbb{P}\left(\frac{1}{x}\leq 3-X\right) = \mathbb{P}\left(X\leq 3-\frac{1}{x}\right)\\ &= \int_{-\infty}^{3-\frac{1}{x}} f(t)dt = \int_{-1}^{3-\frac{1}{x}} \frac{1}{(2\ln 2)(2+t)}dt\\ &= \frac{1}{2\ln 2}\left[\ln(2+t)\right]_{-1}^{3-\frac{1}{x}} = \frac{1}{2\ln 2}\ln\left(5-\frac{1}{x}\right).\end{aligned}$$

Au final, la fonction de répartition de Y est

$$F_Y(x)=\begin{cases}1 & \text{si } x>1,\\ \dfrac{1}{2\ln 2}\ln\left(5-\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x\in\left[\frac{1}{4},1\right],\\ 0 & \text{si } x<\frac{1}{4}.\end{cases}$$

Comme

$$\left(\ln\left(5-\frac{1}{x}\right)\right)' = \frac{-\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{5-\frac{1}{x}} = \frac{1}{x^2\left(5-\frac{1}{x}\right)} = \frac{1}{(5x^2-x)},$$

la densité de Y est

$$f_Y(x)=F_Y'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{(2\ln 2)\left(5x^2-x\right)} & \text{si } x\in\left[\frac{1}{4},1\right],\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Exercice 12. Soit X une *v.a.* de densité :

$$f(x)=\begin{cases}4\dfrac{\ln x}{x^3} & \text{si } x\geq 1,\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

1. Vérifier que f est bien une densité.

2. Calculer $\mathbb{E}(X)$.

Solution.

1. On a
   — pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$,
   — f est continue sur $\mathbb{R}$,
   — en faisant une intégration par parties,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx &= \int_1^{\infty} 4\frac{\ln x}{x^3}dx = 4\left(\left[-\frac{1}{2x^2}\ln x\right]_1^{\infty} - \int_1^{\infty}\left(-\frac{1}{2x^2}\right)\times\frac{1}{x}dx\right) \\ &= 4\left(0 + \int_1^{\infty}\frac{1}{2x^3}dx\right) = 4\left[-\frac{1}{4x^2}\right]_1^{\infty} = 1.\end{aligned}$$

   Donc f est bien une densité.

2. On a

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_1^{\infty} x \times 4\frac{\ln x}{x^3}dx = 4\int_1^{\infty}\frac{\ln x}{x^2}dx.$$

   En faisant une intégration par parties, on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= 4\left(\left[-\frac{1}{x}\ln x\right]_1^{\infty} - \int_1^{\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)\times\frac{1}{x}dx\right) = 4\left(0 + \int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}dx\right) \\ &= 4\left[-\frac{1}{x}\right]_1^{\infty} = 4.\end{aligned}$$

⋆

Exercice 13. Soit (X, Y) un couple de v.a. de densité :

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{e-1}xe^y & \text{si } (x,y) \in [0,1]^2, \\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

1. Déterminer une densité de X, puis une densité de Y.
2. Est-ce que X et Y sont indépendantes ?

Solution.

1. La densité de X est

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(x,y)dy, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

   On a $X(\Omega) = [0,1]$. Par conséquent, pour tout $x \notin [0,1]$, on a

$$f_X(x) = 0.$$

   Pour tout $x \in [0,1]$, on a

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(x,y)dy = \int_0^1 \frac{2}{e-1}xe^y dy = \frac{2}{e-1}x\int_0^1 e^y dy \\ &= \frac{2}{e-1}x\left[e^y\right]_0^1 = \frac{2}{e-1}x\times(e-1) = 2x.\end{aligned}$$

   Au final, la densité de X est

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in [0,1], \\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

La densité de Y est

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(x,y)dx, \qquad y \in \mathbb{R}.$$

On a $Y(\Omega) = [0,1]$. Par conséquent, pour tout $y \notin [0,1]$, on a

$$f_Y(y) = 0.$$

Pour tout $y \in [0,1]$, on a

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(x,y)dx = \int_0^1 \frac{2}{e-1} x e^y dx = \frac{2}{e-1} e^y \int_0^1 x dx \\ &= \frac{2}{e-1} e^y \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{e-1} e^y. \end{aligned}$$

Au final, la densité de Y est

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{e-1} e^y & \text{si } y \in [0,1], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

2. En utilisant le résultat de la question 1-, on montre que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, on a

$$f_{(X,Y)}(x,y) = f_X(x) f_Y(y).$$

Autrement dit, la densité du couple de variables aléatoires réelles (X,Y) est égale au produit des densités respectives de X et de Y. On en conclut que les variables aléatoires réelles X et Y sont indépendantes.

Exercice 14. Soit (X,Y) un couple de v.a. de densité :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } 0 \leq y \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Est-ce que X et Y sont indépendantes ?
2. Déterminer une densité de X, puis une densité de Y.
3. Calculer $Cov(X,Y)$

Solution.

1. La densité de X est $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy$, $x \in \mathbb{R}$. On a $X(\Omega) = [0,1]$. Par conséquent, pour tout $x \notin [0,1]$, on a

$$f_X(x) = 0.$$

Pour tout $x \in [0,1]$, on a

$$f_X(x) = \int_0^x \frac{1}{x} dy = 1.$$

Au final, la densité de X est

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,1], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La densité de Y est $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx$, $y \in \mathbb{R}$. On a $Y(\Omega) = [0,1]$. Par conséquent, pour tout $y \notin [0,1]$, on a

$$f_Y(y) = 0.$$

Pour tout $y \in [0,1]$, on a

$$f_Y(y) = \int_y^1 \frac{1}{x} dx = [\ln x]_y^1 = -\ln y.$$

Au final, la densité de Y est

$$f_Y(y) = \begin{cases} -\ln y & \text{si } y \in [0,1], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

2. En utilisant les résultats de la question 1-, on a

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = \int_0^1 x \times 1 dx = \int_0^1 x dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2},$$

en faisant une intégration par parties,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y) &= \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy = \int_0^1 y \times (-\ln y) dy = -\int_0^1 y \ln y dy \\ &= -\left(\left[\frac{y^2}{2} \ln y\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{y^2}{2} \times \frac{1}{y} dy\right) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 y dy = \frac{1}{2} \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(XY) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy f(x,y) dx dy = \int_0^1 \left(\int_0^x xy \frac{1}{x} dy\right) dx \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^x y dy\right) dx = \int_0^1 \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^x dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{2} \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{6} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{24}.$$

Exercice 15. Soit (X,Y) un coupe de v.a. de densité jointe :

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 y & \text{si } x \geq 0,\ y \geq 0 \text{ et } x + y \leq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Déterminer une densité de X, puis une densité de Y.
2. Est-ce que X et Y sont indépendantes ?
3. Calculer $\mathbb{P}(Y \geq X)$.
4. Calculer $\mathbb{E}\left(\frac{1}{XY}\right)$.

Solution.

1. La densité de X est

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(x,y) dy, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

On a $X(\Omega) = [0,1]$. Par conséquent, pour tout $x \notin [0,1]$, on a

$$f_X(x) = 0.$$

Pour tout $x \in [0,1]$, on a

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(x,y)dy = \int_0^{1-x} x^2 y dy = x^2 \int_0^{1-x} y dy \\ &= x^2 \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{1-x} = \frac{1}{2}(x(1-x))^2. \end{aligned}$$

Au final, la densité de X est

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x(1-x))^2 & \text{si } x \in [0,1], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La densité de Y est

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(x,y)dx, \qquad y \in \mathbb{R}.$$

On a $Y(\Omega) = [0,1]$. Par conséquent, pour tout $y \notin [0,1]$, on a

$$f_Y(y) = 0.$$

Pour tout $y \in [0,1]$, on a

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(x,y)dx = \int_0^{1-y} x^2 y dx = y \int_0^{1-y} x^2 dx \\ &= y \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{1-y} = \frac{1}{3} y(1-y)^3. \end{aligned}$$

Au final, la densité de Y est

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{3}y(1-y)^3 & \text{si } y \in [0,1], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

2. En utilisant le résultat de la question 1-, on montre qu'il existe $x \in [0,1]$ et $y \in [0,1]$ tels que

$$f_{(X,Y)}(x,y) \neq f_X(x) f_Y(y).$$

Autrement dit, la densité du couple de variables aléatoires réelles (X,Y) n'est pas égale au produit des densités respectives de X et de Y. On en conclut que les variables aléatoires réelles X et Y ne sont pas indépendantes.

3. On a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y \geq X) &= \int\int_{\{(x,y);\ y \geq x\}} f_{(X,Y)}(x,y)dxdy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_x^{\infty} f_{(X,Y)}(x,y)dxdy \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}}\int_x^{1-x} x^2 y dxdy = \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 [\int_x^{1-x} y dy] dx = \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 \left[\frac{y^2}{2}\right]_x^{1-x} dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} x^2 \left((1-x)^2 - x^2\right) dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} x^2 (1-2x) dx \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{1}{2}} - \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{48} - \frac{1}{64} = \frac{1}{192}. \end{aligned}$$

4. On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\frac{1}{XY}\right) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{xy}f_{(X,Y)}(x,y)dxdy = \int_0^1\int_0^{1-x} x\ dx\ dy \\
&= \int_0^1 x\,[y]_0^{1-x}\,dx = \int_0^1 x(1-x)dx \\
&= \left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 1/2-1/3 = \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

Exercice 16. Soient X et Y deux v.a. à densité indépendantes telles que la densité de X est

$$f_X(x) = \begin{cases} 6x(1-x) & \text{si } x \in [0,1], \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et la densité de Y est

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{6}y^3e^{-y} & \text{si } y \geq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On pose $U = XY$ et $V = (1-X)Y$.

1. Déterminer $U(\Omega)$ et $V(\Omega)$.
2. Pour tout $x \in [0,1]$ et tout $y > 0$, on pose $u = xy$ et $v = (1-x)y$.
   (a) Montrer que $(x,y) = \left(\frac{u}{u+v}, u+v\right)$.
   (b) Montrer que le jacobien associé au changement de variables de la question 2 (a) est
   $$J(u,v) = \frac{1}{u+v}.$$
3. Déterminer une densité de (U,V).
4. Montrer que U et V sont *iid*. Donner une densité de U.

Solution.

1. On a $X(\Omega) = [0,1]$ et $Y(\Omega) = [0,\infty[$. D'où $U(\Omega) = (XY)(\Omega) = [0,\infty[$ et $V(\Omega) = ((1-X)Y)(\Omega) = [0,\infty[$.
2. (a) On a $v = (1-x)y = y - xy = y - v$, donc
   $$y = u + v.$$
   Comme $u = xy$, on a
   $$x = \frac{u}{y} = \frac{u}{u+v}.$$
   Au final, $(x,y) = \left(\frac{u}{u+v}, u+v\right)$.
   (b) Le changement de variables proposé à la question 2-*a*) est $(x,y) = (\frac{u}{u+v}, u+v)$. Le jacobien associé est
   $$J(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{v}{(u+v)^2} & -\frac{u}{(u+v)^2} \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{u+v}.$$

3. Pour toute fonction continue bornée $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(g(U,V)) &= \mathbb{E}\left(g\left(XY,(1-X)Y\right)\right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g\left(xy,(1-x)y\right) f_{(X,Y)}(x,y)dxdy, \end{aligned}$$

où $f_{(X,Y)}$ désigne la densité du couple (X,Y). Comme X et Y sont indépendantes, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a $f_{(X,Y)}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$. Si on pose $u = xy$ et $v = (1-x)y$, alors, par le résultat de la question 2-a), $x = \frac{u}{u+v}$ et $y = u+v$. Considérons le changement de variables $(x,y) = \left(\frac{u}{u+v}, u+v\right)$. En utilisant le résultat de la question 2-b), le jacobien associé est $J(u,v) = \frac{1}{u+v}$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(g(U,V)) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(u,v) f_X\left(\frac{u}{u+v}\right) f_Y\left(u+v\right) |J(u,v)| dudv \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(u,v) f_X\left(\frac{u}{u+v}\right) f_Y\left(u+v\right) \frac{1}{|u+v|} dudv \\ &= \mathbb{E}(g(S,T)), \end{aligned}$$

où (S,T) est un couple de variables aléatoires réelles de densité

$$f_{(S,T)}(u,v) = \begin{cases} f_X\left(\frac{u}{u+v}\right) f_Y\left(u+v\right) \frac{1}{|u+v|} & \text{si } (u,v) \in (\mathbb{R}^*)^2 , \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On en déduit que (U,V) et (S,T) suivent la même loi, donc la densité de (U,V) est

$$f_{(U,V)}(u,v) = \begin{cases} f_X\left(\frac{u}{u+v}\right) f_Y\left(u+v\right) \frac{1}{|u+v|} & \text{si } (u,v) \in (\mathbb{R}^*)^2 , \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En utilisant les définitions de f_X et f_Y, il vient

$$f_{(U,V)}(u,v) = \begin{cases} uve^{-u-v} & \text{si } u > 0 \text{ et } v > 0 , \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

4. En utilisant le résultat de la question 3-, pour tout $u \in \mathbb{R}$ et tout $v \geq 0$, on a $f_{(U,V)}(u,v) = g(u)g(v)$ où

$$g(u) = \begin{cases} ue^{-u} & \text{si } u > 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Autrement dit, $f_{(U,V)}(u,v)$, la densité du couple (U,V), est égale au produit de deux fonctions, $g(u)$ et $g(v)$. La première dépend uniquement de u, et la seconde, uniquement de v. Par conséquent, U et V sont indépendantes. Comme g est une densité, U a pour densité g, et V a pour densité g. Donc U et V sont identiquement distribuées.

Exercice 17. Soient $\lambda > 0$ et X, Y et Z trois v.a. *iid* suivant chacune la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$, *i.e.* de densité :

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On pose $V = X + Y$ et $W = X + Y + Z$.

1. Déterminer une densité de V.
2. Déterminer une densité de W.
3. Calculer $\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{(X+Y+Z)^2}\right)$.

Solution.

1. Comme $V = X + Y$, avec X et Y indépendantes et identiquement distribuées, la densité de V est, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$f_V(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)f(x-s)ds.$$
Puisque $X(\Omega) = [0, \infty[$ et $Y(\Omega) = [0, \infty[$, on a $V(\Omega) = (X+Y)(\Omega) = [0, \infty[$. Par conséquent, pour tout $x < 0$, on a
$$f_V(x) = 0.$$
Pour tout $x \geq 0$, on a
$$f_V(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda s} \times \lambda e^{-\lambda(x-s)} ds = \lambda^2 e^{-\lambda x} \int_0^x ds = \lambda^2 x e^{-\lambda x}.$$
Au final, la densité de V est
$$f_V(x) = \begin{cases} \lambda^2 x e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

2. Comme $W = V + Z$, avec $V = X + Y$ et Z indépendantes, la densité de W est, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$f_W(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_V(s)f(x-s)ds,$$
où f_V désigne la densité de V déterminée au résultat de la question 1- et $f = f_Z$ désigne la densité de Z. Puisque $V(\Omega) = [0, \infty[$ et $Z(\Omega) = [0, \infty[$, on a $W(\Omega) = (V+Z)(\Omega) = [0, \infty[$. Par conséquent, pour tout $x < 0$, on a
$$f_V(x) = 0.$$
Pour tout $x \geq 0$, on a
$$\begin{aligned} f_W(x) &= \int_0^x \lambda^2 s e^{-\lambda s} \times \lambda e^{-\lambda(x-s)} ds = \lambda^3 e^{-\lambda x} \int_0^x s ds \\ &= \lambda^3 e^{-\lambda x} \left[\frac{s^2}{2}\right]_0^x = \frac{\lambda^3}{2} x^2 e^{-\lambda x}. \end{aligned}$$
Au final, la densité de W est
$$f_W(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^3}{2} x^2 e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

3. En utilisant la densité de $W = X + Y + Z$ déterminée au résultat de la question 2-, il vient
$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{(X+Y+Z)^2}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2} f_W(x)dx = \frac{\lambda^3}{2} \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dx = \frac{\lambda^3}{2} \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}\right]_0^{\infty} = \frac{\lambda^2}{2}.$$