Université de Caen | Probabilités et Statistique
Licence 3 Miashs-Maths | Année 2018-2019

TD (suite)

Exercice 1. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a. identiquement distribuées suivant une loi Binomiale de paramètres n et p. Soit $\lambda = np > 0$. Montrer que (X_n) converge vers une v.a de Poisson de paramètre λ. On parle d'approximation poissonniènne de la loi Binomiale.
Indication : On sait que $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{c}{n}\right)^n = \mathrm{e}^c$.

Exercice 2. La probabilité qu'un système tombe en panne est de 0.015. Calculer de deux façons différentes la probabilité qu'il n'y ai aucun système défectueux dans un ensemble de 100.

Exercice 3. Soient X et Y deux v.a. indépendantes. On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et Y suit une loi de Poisson de paramètre $\mu > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on notera $p_n = \mathbb{P}(X = n)$ et $q_n = \mathbb{P}(Y = n)$.

1. Montrer que la variable $Z = X + Y$ suit une loi de Poisson dont on déterminera le paramètre. Trouver l'espérance et la variance de Z
2. Soit $k \in \mathbb{N}$. Déterminer la loi conditionnelle de X sachant que $Z = k$.
3. On pose $U = X - Y$
   i) Trouver l'espérance et la variance de U
   ii) Déterminer l'ensemble des valeurs que peut prendre U. La variable U est-elle une variable de Poisson ?
   iii) Trouver la loi conditionnelle de U sachant que $Z = k$, où $k \in \mathbb{N}$ (on pourra utiliser le résultat de la question 2).

Rappels

— Une v.a. X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ ssi

$$\forall i \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X = i) = \frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda}.$$

— $\sum_{i=0}^{k} C_k^i a^i b^{k-i} = (a+b)^k$
— $C_k^i = \frac{k!}{i!(k-i)!}$
— Soit X une v.a. telle que

$$\forall i \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X = i) = C_k^i\ p^i\ (1-p)^{k-i}$$

où $k \geq 0$ et $0 \leq p \leq 1$ alors X suit une loi Binomiale de paramètres k et p.

⋆

Exercice 4. Déterminer l'unique entier a tel que la fonction f définie ci-dessous soit une densité :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{4}x^{a+1} & \text{si } x \in [0,2], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 5. Soit X une *v.a.* suivant la loi uniforme $\mathcal{U}_{[0,1]}$, *i.e.* de densité :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,1], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathrm{Var}(X)$.
2. Montrer que la *v.a.* $Z = 1 - X$ suit la même loi que X.
3. Soit $\lambda > 0$. On pose
$$Y = -\frac{\ln(1-X)}{\lambda}.$$
Calculer la fonction de répartition de Y, puis une densité de Y.

Exercice 6. Soient $\theta > 0$ et X une *v.a.* de densité :
$$f(x) = \begin{cases} (\theta+1)(\theta+2)(1-x)x^{\theta} & \text{si } x \in [0,1], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Vérifier que f est bien une densité.
2. Calculer $\mathbb{E}(X)$.

Exercice 7. Soient $\theta > 1$ et X une *v.a.* de densité :
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x\ln(\theta)} & \text{si } x \in [1,\theta], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathrm{Var}(X)$.
2. Montrer que, pour tout $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tels que $1 \leq a < b \leq \theta$ et $1 \leq ac < bc \leq \theta$, on a
$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \mathbb{P}(ac \leq X \leq bc).$$
3. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. On pose $Y = X^m$. Déterminer une densité de Y.

Exercice 8. Soit X une *v.a.* suivant la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ de paramètre $\lambda > 0$, *i.e.* de densité :
$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Calculer $\mathbb{P}(0 < X \leq 1)$, $\mathbb{P}(X > 3)$
2. Y a-t-il une différence entre $\mathbb{P}(0 < X \leq 1)$ est $\mathbb{P}(0 \leq X \leq 1)$?
3. Calculer $\mathbb{E}[X]$
4. Calculer $\mathrm{Var}[X]$
5. Déterminer la fonction de répartition de X

Exercice 9. Soit X une *v.a.* suivant la loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$, *i.e.* de densité :
$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On pose $Y = \ln(e^X - 1)$.

1. Déterminer la fonction de répartition de Y, puis une densité de Y.
2. Est-ce que Y est une *v.a.* symétrique ?
3. Calculer $\mathbb{E}(Y)$.

Exercice 10. Soit X une v.a. suivant la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$, *i.e.* de densité :
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

On pose $Y = |X| + 1$.

1. Déterminer la fonction de répartition de Y en fonction de celle de X, puis une densité de Y.
2. Calculer $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathrm{Var}(Y)$.

Exercice 11. Soit X une *v.a.* de densité :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(2\ln(2))(2+x)} & \text{si } x \in [-1,2], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Calculer $\mathbb{P}(X < 0)$.
2. Calculer $\mathbb{E}(2+X)$, $\mathbb{E}\left(X(2+X)\right)$ et $\mathbb{E}\left(X^2\right)$.
3. On pose
$$Y = \frac{1}{3-X}.$$
Déterminer une densité de Y.

Exercice 12. Soit X une *v.a.* de densité :

$$f(x) = \begin{cases} 4\dfrac{\ln x}{x^3} & \text{si } x \geq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Vérifier que f est bien une densité.
2. Calculer $\mathbb{E}(X)$.

⋆

Exercice 13. Soit (X,Y) un couple de v.a. de densité :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2}{e-1}xe^y & \text{si } (x,y) \in [0,1]^2, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Déterminer une densité de X, puis une densité de Y.
2. Est-ce que X et Y sont indépendantes ?

Exercice 14. Soit (X,Y) un couple de v.a. de densité :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } 0 \leq y \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Est-ce que X et Y sont indépendantes ?
2. Déterminer une densité de X, puis une densité de Y.
3. Calculer $Cov(X,Y)$

Exercice 15. Soient X et Y deux v.a. à densité indépendantes telles que la densité de X est

$$f_X(x) = \begin{cases} 6x(1-x) & \text{si } x \in [0,1], \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et la densité de Y est

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{6}y^3e^{-y} & \text{si } y \geq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On pose $U = XY$ et $V = (1-X)Y$.

1. Déterminer $U(\Omega)$ et $V(\Omega)$.
2. Pour tout $x \in [0,1]$ et tout $y > 0$, on pose $u = xy$ et $v = (1-x)y$.
   (a) Montrer que $(x,y) = \left(\dfrac{u}{u+v}, u+v\right)$.
   (b) Montrer que le jacobien associé au changement de variables de la question 2 (a) est
$$J(u,v) = \frac{1}{u+v}.$$
3. Déterminer une densité de (U,V).
4. Montrer que U et V sont *iid*. Donner une densité de U.

Exercice 16. Soient $\lambda > 0$ et X, Y et Z trois v.a. *iid* suivant chacune la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$, *i.e.* de densité :

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On pose $V = X + Y$ et $W = X + Y + Z$.

1. Déterminer une densité de V.
2. Déterminer une densité de W.
3. Calculer $\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{(X+Y+Z)^2}\right)$.