Master 1 Informatique
Éléments de statistique inférentielle

Faicel Chamroukhi
Maître de Conférences
UTLN, LSIS UMR CNRS 7296

email: chamroukhi@univ-tln.fr
web: chamroukhi.univ-tln.fr

2014/2015

Plan I

1 Tests d'hypothèses

Tests d'hypothèses

- Région de rejet d'un test
- Erreurs associées à un test
- Statistiques de test

Tests d'hypothèses

Un **test statistique** est un procédé qui permet de décider entre deux ou plusieurs hypothèses sur une population selon les résultats obtenus à partir d'un échantillon de cette population.

Généralement, on teste une hypothèse sur laquelle on se demande si les données observées fournissent une évidence suffisante pour la rejeter, sinon elle est retenue.

$\Rightarrow$ Cette hypothèse s'appelle l'*hypothèse nulle* et se note H_0.

Par exemple, si le test concerne la valeur d'un paramètre θ, cette hypothèse nulle peut s'écrire

$$H_0 : \theta \in \Theta_0 \tag{1}$$

où Θ_0 est l'ensemble de valeurs supposée du paramètre θ selon H_0.

Tests d'hypothèses

Toute autre hypothèse qui diffère de l'hypothèse nulle s'appelle l'**hypothèse alternative** (ou contre-hypothèse) qui se note H_1.

L'hypothèse nulle est donc testée contre l'hypothèse alternative.

Une hypothèse est dite **simple** si elle ne contient qu'un seul élément, ce qui est généralement le cas pour $H_0 : \theta = \theta_0$; sinon elle est composite.

L'hypothèse alternative est généralement composite

$$H_1 : \theta \in \Theta_1 \tag{2}$$

avec Θ_1 un sous ensemble de l'ensemble des paramètres disjoint de θ_0.

Tests d'hypothèses

H_1 se ramène souvent aux trois cas suivants

1. $H_1 : \theta < \theta_0$,
2. $H_1 : \theta > \theta_0$,
3. $H_1 : \theta \neq \theta_0$.

Dans les deux premiers cas, le test est dit **unilatéral** et dans le dernier le test est dit **bilatéral**.

Région de rejet d'un test et erreurs

Région de rejet d'un test

Soit X une variable aléatoire et $\mathcal{X}$ l'ensemble de ses valeurs. Le test s'effectue en trouvant un sous-ensemble $R \subseteq \mathcal{X}$ appelé la *région de rejet*. Ainsi, si $X \in R$, l'hypothèse nulle (H_0) est rejetée, sinon, elle est retenue. Cette région se définit sou la forme suivante

$$R = \{x : T(x) > s\} \tag{3}$$

où T est une **statistique de test** et s un **seuil**.

$\Rightarrow$ Le problème en test d'hypothèse est donc de trouver une statistique de test convenable et une valeur convenable pour le seuil de rejet s

Région de rejet d'un test et erreurs

Bien sur, en effectuant un test d'hypothèses, on peut se tromper en rejetant l'hypothèse nulle ou en l'acceptant.

Il existe donc deux types d'erreur : l'**erreur de première espèce** (dite aussi erreur de type I) et l'**erreur de deuxième espèce** (dite aussi erreur de type II).

Erreur de première espèce

L'erreur de première espèce correspond au cas où l'on rejette H_0 (décider H_1) alors que celle-ci est vraie.

Erreur de deuxième espèce

L'erreur de deuxième espèce correspond quant à elle au cas où l'on rejette H_1 (décider H_0) alors que celle-ci est vraie.

Erreurs et risques suite à un test

Les décisions possibles sont récapitulées par le tableau suivant.

Décision\ Vérité	H_0	H_1
H_0	décision correcte	erreur de deuxième espèce
H_1	erreur de première espèce	décision correcte

Table : Récapitulatif des décisions en test d'hypothèse

Pour chacune des deux erreurs, on associe un une probabilité (**un risque**).

Définition : risque de première espèce

Le risque de première espèce est notée α. Il représente le risque de rejeter H_0 à tort. Des valeurs de ce risque sont $1\%, 5\%, 10\%$ qui correspondent aux niveaux de confiance $99\%, 95\%$ et 90%.

Définition : risque de deuxième espèce

Le risque de deuxième espèce représente quant à lui le risque de retenir H_0 à tort. Il est noté β.

Erreurs et risques suite à un test

Définition : niveau de confiance du test

Le niveau de confiance du test est donc $1-\alpha$ qui correspond à retenir H_0 à raison.

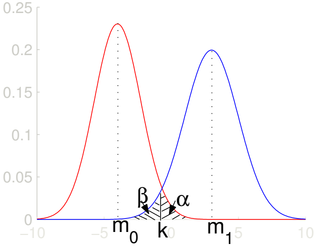
Définition : puissance d'un test

La *puissance d'un test* est la probabilité de rejeter l'hypothèse nulle à raison. La puissance du test est donc le complément de l'erreur de deuxième espèce et est donc égale à $1-\beta$.

On peut résumer cela par le tableau suivant :

Décision\ Vérité	H_0	H_1
H_0	niveau de confiance $1-\alpha$	risque β
H_1	risque α	puissance de test $1-\beta$

Table : Récapitulatif sur les risques associés à un test d'hypothèses


0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
−10
−5
0
5
10
m0
k
m1
β
α

Statistiques de test

Le choix de la statistique de test et de la région de rejet s'effectue de façon à maximiser la puissance du test $1 - \beta$ pour un risque de première espèce α fixé.

Test du rapport de vraisemblance (ou Test de Neyman-Pearson)

Si l'on se place dans le cadre d'un test entre deux hypothèses simples

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad \text{versus} \quad H_1 : \theta = \theta_1,$$

Le théorème de Neyman et Pearson montre que le *test du rapport de vraisemblance* est le test le plus puissant avec un risque α. Selon ce test, la région critique (de rejet) optimale est définie par

$$R = \{x : \frac{L(\theta_1; x)}{L(\theta_0; x)} > s_\alpha\}$$

avec $L(\theta_k; x)$ étant la vraisemblance de θ_k pour x. Le seuil de rejet s_α, qui dépend de α, est déterminé par $\alpha = \mathbb{P}_{\theta_0}(X \in R)$.

Test du rapport de vraisemblance (ou Test de Neyman-Pearson) I

Exemple :

Soit un échantillon d'observations *i.i.d.* $(x_1, \ldots, x_n)$ où $X_i \sim \mathcal{N}(x_i; \mu, \sigma^2)$

supposons que la variance σ^2 est connue et que l'espérance μ est inconnue

Considérons le test

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{versus} \quad H_1 : \mu = \mu_1,$$

avec $\mu < \mu_1$

Test du rapport de vraisemblance (ou Test de Neyman-Pearson) II

On la vraisemblance de μ pour l'échantillon $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ est

$$\begin{aligned} L(\mu; \mathbf{x}) &= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\,\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)^2\right] \\ &= \frac{1}{(\sigma^2\sqrt{2\,\pi})^n} \exp\left[-\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2\sigma}\,(x_i - \mu)^2\right] \end{aligned} \tag{4}$$

le rapport de vraisemblance est don donné par

$$\frac{L(\mu_1; \mathbf{x})}{L(\mu_0; \mathbf{x})} = \exp\left[\frac{1}{2\sigma^2} 2\,(\mu_1 - \mu_0) \sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{n}{2\sigma^2}\,(\mu_1^2 - \mu_0^2)\right] \tag{5}$$

Donc, en prenant le logarithme, $\frac{L(\mu_1;\mathbf{x})}{L(\mu_0;\mathbf{x})} > s_\alpha$ est équivalent à

$$\bar{x} > \log(s_\alpha)\frac{\sigma^2}{n(\mu_1 - \mu_0)} + \frac{(\mu_1 + \mu_0)}{2} = \text{cste}$$

Test du rapport de vraisemblance (ou Test de Neyman-Pearson) III

On a vu que cette *cste* qui dépende α est déterminé par $\alpha = \mathbb{P}_{\mu_0}(X \in R)$ qui vaut dans ce cas $\alpha = \mathbb{P}_{\mu_0}(\bar{x} > \text{cste})$

La région de rejet du test est donc donnée par

$$R = \{\mathbf{x} : \bar{x} > \mu_0 + u_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\} \tag{6}$$

Test de Wald I

Soit θ un paramètre et soit $\hat{\Theta}$ un estimateur de ce paramètre et soit $\hat{\sigma}$ l'écart type de cet estimateur $\hat{\Theta}$. Considérons le test

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad \text{versus} \quad H_1 : \theta \neq \theta_0,$$

Supposons que $\hat{\Theta}$ est asymptotiquement normal : $\frac{\sqrt{n}(\widehat{\Theta}-\theta_0)}{\sqrt{\mathrm{var}(\hat{\Theta})}} \xrightarrow[n\to\infty]{loi} \mathcal{N}(0,1)$.
Dans le *test de Wald*, la statistique de test est donnée par

$$\frac{\widehat{\Theta} - \theta_0}{\sqrt{\mathrm{var}(\hat{\Theta})}} \tag{7}$$

où $\sqrt{\mathrm{var}(\hat{\Theta})}$ représente l'écart type de l'estimateur. Le test de Wald consiste à comparer cette statistique à la loi normale centrée réduite. Il consiste alors à rejeter H_0 si

$$\left| \frac{(\widehat{\Theta} - \theta_0)}{\sqrt{\mathrm{var}(\hat{\Theta})}} \right| > u_{\frac{\alpha}{2}}$$

Test de Wald II

où $u_{\alpha/2}$ est le quantile d'ordre $\alpha/2$ de la loi normale centrée réduite.

Exemple : Cas d'un grand échantillon Gaussien

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{versus} \quad H_1 : \mu \neq \mu_0,$$

lorsque σ est connue

la statistique de test sous H_0 dans ce cas est donnée par

$$U = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \tag{8}$$

On sait que $U \sim \mathcal{N}(0, 1)$

Test de Wald III

On rejette donc H_0 si

$$\left|\frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right| > u_{\frac{\alpha}{2}}$$

où $u_{\frac{\alpha}{2}}$ est le quantile d'ordre $\alpha/2$ de la loi normale centrée réduite

ou par équivalence : rejeter H_0 si

$$\left|\bar{X} - \mu_0\right| > u_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$