Espérance et variance

1. Soit X une v.a. Montrer que $\text{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$
2. Soient X et Y deux v.a. Montrer que

$$\text{Var}(X+Y) = \text{Var}(X) + Var(Y) + 2\,\text{Cov}(X,Y)$$

3. En déduire une relation pour le calcul de $\text{Var}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right)$ pour le cas de n v.a $X_1, \ldots, X_n$
4. Supposons que les v.a. X et Y sont décorrélées. Qu'en déduit-on pour $\text{Var}(X+Y)$? et plus généralement pour $\text{Var}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right)$ pour un échantillon indépendant $X_1, \ldots, X_n$?

Solution

1.

$$\begin{aligned}
\text{Var}(X) &= \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])]^2 && (1)\\
&= \mathbb{E}\left[X^2 + (E[X])^2 - 2X\mathbb{E}[X]\right] && (2)\\
&= \mathbb{E}[X^2] + (\mathbb{E}[X])^2 - 2\mathbb{E}\left[X\mathbb{E}[X]\right] && (3)\\
&= \mathbb{E}[X^2] + (\mathbb{E}[X])^2 - 2\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[X] && (4)\\
&= \mathbb{E}[X^2] + (\mathbb{E}[X])^2 - 2(\mathbb{E}[X])^2 && (5)\\
&= \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 && (6)
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\text{Var}(X+Y) &= \mathbb{E}[(X+Y)^2] - (\mathbb{E}[X+Y])^2 && (7)\\
&= \mathbb{E}[X^2 + Y^2 + 2XY] - (\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y])^2 && (8)\\
&= \mathbb{E}[X^2] + \mathbb{E}[Y^2] + 2\mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]^2 - \mathbb{E}[Y]^2 - 2\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] && (9)\\
&= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 + \mathbb{E}[Y]^2 - \mathbb{E}[Y]^2 + 2(\mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]) && (10)\\
&= \text{Var}(X) + Var(Y) + 2\,\text{Cov}(X,Y) && (11)
\end{aligned}$$

3. Pour le cas de n v.a, on a donc

$$\text{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i,j=1}^{n} \text{Cov}(X_i, X_j) = \sum_{i=1}^{n} \text{Var}(X_i) + \sum_{i \neq j} \text{Cov}(X_i, X_j).$$

4. Supposons que X et Y sont décorrélées, on a donc $\text{Cov}(X,Y) = 0$ et par conséquent

$$\text{Var}(X+Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$$

5. Pour le cas de n v.a décorrélées, on a donc

$$\text{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \text{Var}(X_i)$$

Variables Aléatoires discrètes

Loi de Bernoulli : La loi de Bernoulli est une distribution de probabilité discrète pour une v.a binaire X qui prend la valeur 1 avec la probabilité p et 0 avec la probabilité $1-p$. Elle est donc caractérisé par le seul paramètre p et se définie ainsi

$$\mathbb{P}(X = x) = \begin{cases} p & \text{si } x = 1, \\ 1-p & \text{si } x = 0, \end{cases} \tag{12}$$

ou d'une manière équivalente $\mathbb{P}(X = x) = p^x(1-p)^{1-x}$, $x \in \{0, 1\}$

1. Montrer que l'espérance mathématique d'une variable aléatoire de Bernoulli vaut p
2. Montrer que la variance d'une variable aléatoire de Bernoulli vaut $p(1-p)$.

Solution

1.
$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \sum_k x_k \mathbb{P}(X = x_k) && (13)\\
&= 0 \times \mathbb{P}(X=0) + 1 \times \mathbb{P}(X=1) && (14)\\
&= 1 \times \mathbb{P}(X=1) && (15)\\
&= 1 \times p = p && (16)
\end{aligned}$$

2. on a
$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X^2] &= \sum_k x_k^2 \mathbb{P}(X = x_k) && (17)\\
&= 0^2 \times \mathbb{P}(X=0) + 1^2 \times \mathbb{P}(X=1) && (18)\\
&= 1 \times \mathbb{P}(X=1) = p && (19)
\end{aligned}$$
donc
$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X) &= \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 && (20)\\
&= p - p^2 && (21)\\
&= p(1-p) && (22)
\end{aligned}$$

3.

Loi de Binomiale : La loi Binomiale, notée $\mathcal{B}(n,p)$ se définissant ainsi

$$P(X = x) = C_n^k p^x (1-p)^{n-x}, \quad x \in \mathbb{N}, \qquad (23)$$

peut être décrite comme la de n v.a. $X_1, \ldots, X_n$ **indépendantes** de Bernoulli de paramètre p ($X_i \overset{ind.}{\sim} \mathrm{Bern}(p)$). Elle est donc caractérisée par deux paramètres (n, p).

$$\sum_{i=1}^n X_i \sim \mathcal{B}(n,p). \qquad (24)$$

En utilisant les propriétés de l'espérance mathématique et de la variance,

1. montrer que l'espérance mathématique d'une variable aléatoire Binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ vaut np
2. montrer que sa variance vaut $np(1-p)$.

Solution

1. On a $\sum_{i=1}^n X_i \sim \mathcal{B}(n,p)$ ou $X_i \overset{ind.}{\sim} \mathrm{Bern}(p)$, donc l'espérance d'une v.a Y de distribution $\mathcal{B}(n,p)$ est donnée par
$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y] &= \mathbb{E}[\sum_{i=1}^n X_i] && (25)\\
&= \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i] && (26)\\
&= \sum_{i=1}^n p && (27)\\
&= np && (28)
\end{aligned}$$

2. de même pour la variance, on en trouve $np(1-p)$

Variables Aléatoires continues

Densité exponentielle : La distribution exponentielle est très souvent utiliser pour caractériser la durée de vie. Une variable X à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, ssi la densité de sa loi de probabilité est de la forme

$$f(x;\lambda) = \lambda e^{-\lambda x}$$

Soit $X \sim f_X(x;\lambda)$

1. calculer $\mathbb{E}[X]$
2. calculer $\mathrm{Var}[X]$

Solution

1.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \int_{\mathbb{R}^+} x f(x;\lambda)\,\mathrm{d}\,x && (29)\\
&= \int_0^{+\infty} x\lambda e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}\,x && (30)\\
&= \lambda \int_0^{+\infty} x e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}\,x && (31)\\
& && (32)
\end{aligned}$$

puis en passant par une intégration par parties,
(rappel : $U'V = [UV]' - V'U$ donc $\int_0^{+\infty} U'V = [UV]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} V'U$)
et en prenant
$U' = e^{-\lambda x}$
$V = x$
$\Rightarrow U'V = xe^{-\lambda x}$
et
$U = \frac{-e^{-\lambda x}}{\lambda}$
$V' = 1$
$\Rightarrow UV = xe^{-\lambda x}$ et $V'U = \frac{-e^{-\lambda x}}{\lambda}$
on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \lambda \int_0^{+\infty} x e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}\,x && (33)\\
&= \lambda \left(\left[x e^{-\lambda x} \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{-e^{-\lambda x}}{\lambda}\,\mathrm{d}\,x \right) && (34)\\
&= \lambda \left(\left[\lim_{x\to+\infty} x e^{-\lambda x} - 0 \right] - \left[\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda^2} \right]_0^{+\infty} \right) && (35)\\
&\overset{\text{Règle de l'Hopital}}{=} \lambda \left([0 - 0] - \left[\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda^2} \right]_0^{+\infty} \right) && (36)\\
&= \lambda \left(- \left[\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda^2} \right]_0^{+\infty} \right) && (37)\\
&= \lambda \left(- \left[0 - \frac{1}{\lambda^2} \right] \right) && (38)\\
&= \frac{1}{\lambda} && (39)
\end{aligned}$$

2. de même pour la variance, on en trouve $\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$