# Espérance et variance

1. Soit $X$ une v.a. Montrer que $\text{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$
2. Soient $X$ et $Y$ deux v.a. Montrer que

$$\text{Var}(X+Y) = \text{Var}(X) + Var(Y) + 2\,\text{Cov}(X,Y)$$

3. En déduire une relation pour le calcul de $\text{Var}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right)$ pour le cas de $n$ v.a $X_1, \ldots, X_n$
4. Supposons que les v.a. $X$ et $Y$ sont décorrélées. Qu'en déduit-on pour $\text{Var}(X+Y)$ ? et plus généralement pour $\text{Var}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right)$ pour un échantillon indépendant $X_1, \ldots, X_n$ ?

# Variables Aléatoires discrètes

**Loi de Bernoulli :** La loi de Bernoulli est une distribution de probabilité discrète pour une v.a binaire $X$ qui prend la valeur 1 avec la probabilité $p$ et 0 avec la probabilité $1-p$. Elle est donc caractérisé par le seul paramètre $p$ et se définie ainsi

$$\mathbb{P}(X=x) = \begin{cases} p & \text{si } x = 1, \\ 1-p & \text{si } x = 0, \end{cases} \tag{1}$$

ou d'une manière équivalente $\mathbb{P}(X=x) = p^x(1-p)^{1-x}$, $x \in \{0,1\}$

1. Montrer que l'espérance mathématique d'une variable aléatoire de Bernoulli vaut $p$
2. Montrer que la variance d'une variable aléatoire de Bernoulli vaut $p(1-p)$.

**Loi de Binomiale :** La loi Binomiale, notée $\mathcal{B}(n,p)$ se définissant ainsi

$$P(X=x) = C_n^k\, p^x(1-p)^{n-x}, \quad x \in \mathbb{N}, \tag{2}$$

peut être décrite comme la de $n$ v.a. $X_1, \ldots, X_n$ **indépendantes** de Bernoulli de paramètre $p$ ($X_i \overset{ind.}{\sim} \text{Bern}(p)$). Elle est donc caractérisée par deux paramètres $(n,p)$.

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathcal{B}(n,p). \tag{3}$$

En utilisant les propriétés de l'espérance mathématique et de la variance,

1. montrer que l'espérance mathématique d'une variable aléatoire Binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ vaut $np$
2. montrer que sa variance vaut $np(1-p)$.

# Variables Aléatoires continues

**Densité exponentielle :** La distribution exponentielle est très souvent utiliser pour caractériser la durée de vie. Une variable $X$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, ssi la densité de sa loi de probabilité est de la forme

$$f(x;\lambda) = \lambda e^{-\lambda x}.$$

Soit $X$ une v.a. de densité exponentielle : $X \sim f_X(x;\lambda)$.

1. Calculer $\mathbb{E}[X]$
2. Calculer $\text{Var}[X]$