1 Maximum de vraisemblance

1.1 Estimation des paramètres d'une loi normale

Soit la loi normale univariée d'epérance μ et de variance σ^2

$$f(x;\mu,\sigma^2) = \mathcal{N}(x;\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\,\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}. \tag{1}$$

Etant donné un échantillon d'observations *i.i.d.* $(x_1,\ldots,x_n)$ où $x_i \sim \mathcal{N}(x_i;\mu,\sigma^2)$

1. calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance (MV) pour μ
2. vérifier que l'estimateur est sans biais et à variance minimale ; en déduire sur son efficacité
3. calculer l'estimateur du MV pour σ^2
4. Est-il sans biais ? sinon, proposez une correction du biais pour fournir un estimateur sans biais

1.2 Estimation des paramètres d'une loi de Poisson

La loi de Poisson de paramètre λ pour $x \in \mathbb{N}$ est donnée par

$$p(x;\lambda) = P(X = x;\lambda) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}. \tag{2}$$

Étant donné un échantillon d'observations *i.i.d.* $(x_1,\ldots,x_n)$ générées suivant une loi de Poisson $p(x;\lambda)$ de paramètre inconnu λ, calculer l'EMV de λ.

2 Espérance et variance de l'estimateur des moindres carrés (EMC)

1. Calculer l'espérance de l'EMC de $\boldsymbol{\beta}$

   $$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{y}\cdot \tag{3}$$

   du modèle linéaire

   $$\mathbf{y} \;=\; \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{e}\cdot \tag{4}$$

   où le bruit $\mathbf{e}$ est centré et de matrice de covariance $\sigma^2\mathbf{I}$
2. En remarquant que

   $$\hat{\boldsymbol{\beta}} \;=\; \boldsymbol{\beta} + (\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{e} \tag{5}$$

calculer la matrice de covariance de l'EMC $\hat{\boldsymbol{\beta}}$